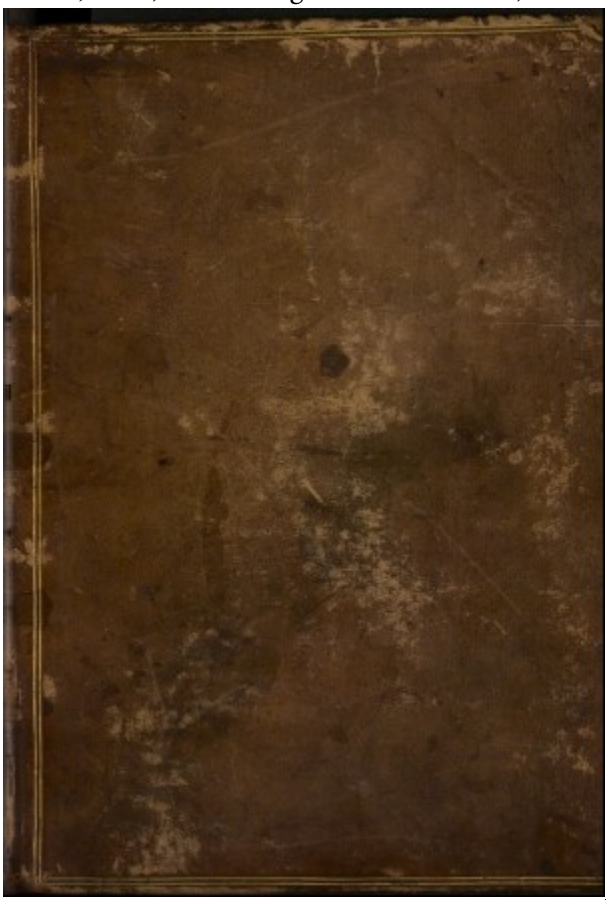
Valerio, Luca, De centro gravitatis solidorum, 1604



Bibliographic information

Author: Valerio, Luca

Title: De centro gravitatis solidorum

Date: 1604

Permanent URL

Copyright information

DE CENTRO GRAVITATIS SOLIDORVM LIBRITRES.

LVCÆ VALERII
Mathematicæ, & Ciuilis Philoſophiæ
in Gymnaſio Romano profeſſoris.

[Figure 1]

ROMÆ, Typis Bartholom ri Bonfadini. MDC IIII.
SVPERIORVM PERMISSV.

Imprimatur

Si placet R. P. Magiſtro S. Palati
B.

Gypſius Viceſger.

Imprimatur

Fr. Io. Maria Braſichellen. Sacri Pal.
Apostol. Magiſt.

[Figure 2]

SANCTISSIMO
DOMINO NOSTRO
CLEMENTI VIII
PONT. OPT. MAX.Lucas Valerius perpetuam felicitatem.

[Figure 3]

Grata Principi munera,
P. B. ex Philoſophiæ late-
bris deprompta, quaſi aurum
ſoli expoſitum illico ſplen-
dent, & publicæ vtilitatis
ſpem oſtendunt, magno or-
nata præſidio in primos liuo-
ris impetus illius approbatione, cuius officium eſt
alia à rep. auertere, alia imperare. Hinc por-
rò factum eſt, vt omnis ferè ſcriptor exiſti matio-
nis periculum aditurus, aliquem ex principibus

viris ſibi deligat, cuius autoritate ipſi dicatum opus ab inuidorum morſibus ſeruetur incolume. Hanc ergo conſuetudinem amanti mihi ſanè feliciter cecidit, vt tu ſola tua propria benignitate permotus in tuos me familiares vltro aſcriberes. Siue enim ingenij mei debilis partus magnam patroni deſiderat autoritatem: tu principum orbis terrarum princeps ſemper digniſſimam principatu ſapientiam præſtitiſti. Seu tam elatæ dedicationes ſolent alienas à ſapientiæ ſtudio ſpes olere: lux tanti patrocinij, tuorumque veterum in me beneficiorum, atram ſuſpicionem amouebit. Quòd verò ad vitam ipſius operis attinet, quam nulla per te velim temporum permutatione terminari: vereor vt id ſua luce multis alijs vitali aſpiciat illa, quæ tua ſtudia, & res geſtas omnium linguis, & litteris celebrabit æternitas. quantum enim tuam excelſam ſuſpicio dignitatem, tantum deſpicor iſtius doni incredibilem cum illa comparati humilitatem: neque id niſi diuinitus crediderim perpetuam in tuis laudibus famam habiturum. Quare illud non ſolum tibi diuini gregis antiſtiti cupio gratum accidere, cuius autoritate protectum in tanta nouarum rerum poſt tam graues autores contemptione, minimo meo cum rubore in medium prodeat: ſed ipſi diuinitati ex voluntate donum expendenti, penes quam eſt æternitas, & cui primum dicata omnia eſſe oportet: vt hi, quostuis luminibus dignaris, de

centro grauitatis ſolidorum ſterilis ingenij mei teſtes libelli à mortis æmula me obliuione defendant. Stomacharis hic, arbitror, quòd tantum ſpectem de nihilo; ſed magis confeſſionis impudentia. At verò non impetus animi ad gloriam, cuius nullum mihi natura ſemen impartiuit (ſit gloriæ loco ignauiæ fugiſſe dedecus) ſed tua erga me voluntas, meisapta ſtudijs liberalitate teſtata hunc ardorem expreſſit. Tanta enim eſt venuſtas tuæ virtutis ex mei meriti penuria, vt putem ſine me indice illam diminutum ſui ſpectaculum poſteris præbituram. Nihil ergo minus cogitans quàm quî tua beneficia cumulando perturbatis iudicijs ſatisfacerem, ſcientia ſcilicet, & virtute illa, qua maximè ſuperbit eneruata, & areſcens Mundiætas; nullum opulentiæ meæ, artis alienæ ſpecimen pro munere gratiæ à te accepto partem tibi reddidi: ſed ingenij mei partum, qualis is cumque eſt; quod & grati animi quæſitum monumentum crimine me audaciæ liberet, ſi quodimpendeat, palam dedicaui. Alij tibi columnas honeſtiſſimis titulis ornatas erigant: ſta tuas in foris collocent: magnificas ædes extruant, quarum in frontibus grandes marmoreæ tabulæ flammantibus auro ſyderibus, & peregrinis lapidibus intextæ ea de te viuo referant ſaxum impudens, quæ verecunda hæc pagina prætermittit. Ego incredibilis tuæ benignitatis non tam grauia teſtimonia, quæ loco moueri nequeant: ſed

expeditum hunc nuntium in longiſſima itinera
deſtinaui. Quem quidem eo minus vereor ne
non tu, quamobrem Telchines fortaſſe aliqui in-
ſectaturi, diſpari ſis voluntate protecturus, quòd
in his tàm reconditis naturæ arcanis geometrica
demonſtratione patefactis, tanquam in ſemine
multiplicem præſcriptionem, ac normam eſſe in-
telliges ipſe pacis inter tuos greges autor, lupi
otomani terror, ciuili, & bellicæ architecturæ
maximè neceſſariam. Quòd que, cum ad theologi-
cam quandam veritatem chriſtiano generi maxi-
me ſalutarem illuſtrandam, per Philoſophi<17> etiam
campos ſapientium hominum corona decoratus,
nulla tantæ molis, quantam ſuſtines negotiorum
iactura latiſſimè vageris; nempe illam creſcere,
atque illuſtrari indies magis ex optas, cuius con-
ſuetudine tantopere delectaris. Quod denique
ſcientiæ ciuilis ipſe peritiſſimus omnium optimè
intelligis, quanti referat ad humanæ ſocietatis for
mam & candorem, regum, atque optimatum a-
mor in ſtudioſos bonarum litterarum. contrà au-
tem ex deſpectione in hos cadente abijs, quorum
mores pro legibus haberi ſolent, noſti commu-
nem ingeniorum veternum, mox tyrannidem gi-
gni, magna cuſtode adempta modeſtiæ imperi-
tantium crebra ciuium ſapientia, quæ prauis ti-
morem efficit, melioribus pudorem, Quod ſi meæ
expectationi exitus reſpondebit, vt te hoc munu-
ſculo vel leuiter lætari ſentiam; alia non iniucun-

da ſtatim proferam, qua PETRVS ALDOBRANDINVS tuus nepos, domi foriſque clariſſimus Cardinalis, cuius inter familiares itidem, beneficijsque deuinctos locum habeo, ſuæ erga me humanitatis teſtimonia ab inuidiæ ſatellite & miniſtra calumnia tueatur: quando duobus talibus viris animi mei captum beneficentia ſua periclitantibus, duplex periculum ſubire ſum coactus. Sed iam verboſæ epiſtolæ, & tuo faſtidio finem impoſiturus peto à te vnum; vt tibi perſuadeas, me inter tuos famulos, quos ære proprio, & victu quotidiano liberaliter ſuſtentas, eorum, qui pro te emori poſſunt, amore, conſtantia, fidelitate nemini planè concedere. Sic tua omnia præſtantiſſima facinora Princeps magnanime, & pietatis columen, Deus Opt. Max. tibi fortunet, quem ad maiores in dies res gerendas in longum æuum incolumen, felicemque conſeruet. Valet.

β, .

Παίγνια φιλοφοις Λουκᾱς τ δε ούμλοκα δάφ,
Στυμόνος ἐγκελάδς είονα πλύν.

Δῶρον ἔπεμψά πέας δζειν τῖς ῡ ϯ ἄδ
Βθοούνης βαπέων πῆξε έμεθλα φύς.

Τοϊς πέζαν αὐαλέων νδῶν ἴαψα μίμνας,
Μέμψ μὴ πῶν τείρεα, μὴ ύχ.

Τοῖς πνος ὀφρυόεν πλυπζάγμονος ὄμμα γιλάας,
Βέλτιον γορέης κέρδος ἔδειζα δ.

Εἰ δέ π τῶν ὅως εζχον εὔ,
Πὶν θάναπς μάζψη μ· εὔχομ λέτω.

Λνέζος οὐ κλέψω χάν εὔφζονος ἐομόνοι
Δγμ ἀγλαὸν, , νομες, καὶ πατζίδ.

Ος δέ με λαθζαιος δήζ, κακόεπος ἀκούο,
Λυῶν ἦς φθονεζῆς ἄζιος πυρκαιῆς.

[Figure 4]

LVC AE
VALER II
DE CENTRO
GRAVITATIS
SOLIDORVM
LIBER PRIMVS.

Propoſitum eſt mihi in hiſce tribus libris, ò Geometra, cuiuſcumque figuræ ſolidæ in geometria ratio haberi ſolet, centrum grauitatis inuenire. Huius autem prouinciæ mihi ſuſcipiendæ occaſio fuit liber ille iam pridem editus Federici Commandini Vrbinatis, in quo cum ille corporum planis terminis definitorum; necnon cylindri, & coni, & fruſti conici, & ſphæræ, & ſphæroidis centrum grauitatis oſtendiſſet; aliorum autem, quæ ſuperficie mixta continentur vno conoide parabolico tentato ſyllogiſmi iactura operam perdidiſſet, ego ſpe magis, ad quam vir ille exarſerat incita-

tus, quàm deterritus lapſu, vehementerque dolens geometriæ partem tamdiu deſiderari cognitione digniſſimam; cum ante exercitationis cauſa omnium, quæ propoſui ſolidorum, excepto conoide parabolico, centra grauitatis aliis viis indagaſſem; poſtea non ſolum parabolici, ſed ante me tentata nemini, hyperbolici conoidis, & fruſti vtriuſque, & portionis vtriuſque conoidis, & portionis fruſti, & hemiſphærij, & hemiſphæroidis, & cuiuſlibet portionis ſphæræ, & ſphæroidis vno, & duobus planis parallelis abſciſſæ centra grauitatis adinueni, multa autem ex his duplici, quædam triplici via. Taceo nunc alia eiuſdem generis, quæ cum vtilia, tum geometriæ ſtudioſis non iniucunda, vt arbitror, futura in poſteriores libros diſtribuimus. Quòd autem aliquot propoſitiones, alias Archimedis lemmaticas, alias Commandini meis rationibus attuli demonſtratas; non tàm idcirco id fcci, ne meæ lucubrationes deperirent, quàm quòd vel ſtylo Euclidis magis conſonæ, vel ad percipiendum eo minus laborioſæ, quo ad inueniendum ſunt difficiliores, vel meo propoſito aptiores viderentur. Earum propoſitionum, Archimedis duo ſunt in primo libro, decimaquarta, & ſeptima, & ſecunda pars vigeſimæ; in ſecundo autem vna. Omne conoides parabolicum ſeſquialterum eſſe coni eandem baſim, & eandem altitudinem habentis. Commandini autem omnes in primo libro nouem; vigeſima tertia, & quinta: trigeſima ſecunda, tertia, quarta, ſeptima, & nona: quadrageſima prima, & ſecunda. Sed multa hic noua inuenies ita ad præſens inſtitutum neceſſaria, vt per ſe tamen ipſa in geometria locum habere debeant, maxime verò tres primæ ſecundi libri propoſitiones, quippe quibus magnam, ac perdifficilem geometriæ partem demonſtratione recta, & generali ad viam regiam redactam eſse intelliges. Ita Deus Opt. Max. cuius auxilio hæc feci, quibus prodeſse alicui vehementer cupio, reliquis meis conatibus opem ferat. Sed ad definitiones accedamus.

DEFINITIONES.

I.

Figuræ aliquæ planæ multilateræ centrum habere dicuntur punctum illud, in quo omnes rectæ lineæ vel angulos oppoſitos iungentes bifariam ſecantur, vel ab angulis ductæ ad laterum oppoſitorum bipartitas ſectiones in eaſdem rationes.

II.

Circa diametrum eſt figura plana, in qua recta quædam, quæ diameter figuræ dicitur, omnes rectas alicui parallelas, à figura terminatas bifariam diuidit.

III.

Octaedrum communiter dictum, eſt figura ſolida octo triangulis binis parallelis, æqualibus, & ſimilibus comprehenſa.

IIII.

Polyedri regularis centrum dicitur punctum, in quo omnes rectæ lineæ, quæ ad angulos oppoſitos pertinent bifariam diuiduntur.

V.

Cuiuſlibet figuræ grauis centrum grauitatis eſt punctum illud, à quo ſuſpenſum graue perſe manet partibus quomodocumque circa conſtitutis.

VI.

Axis priſmatis, & pyramidis & eius fruſti dicitur recta linea, quæ in pyramide à vertice ad baſis centrum figuræ vel grauitatis pertinet: in reliquis autem, quæ baſium oppoſitarum figuræ vel grauitatis centra iungit.

VII.

Si qua figura ſolida planis parallelis ita ſecari poſſit, vt quæcumque ſectiones centrum habeant, & ſint inter ſe ſimiles; aliqua autem recta linea, ſiue ad centra baſium oppoſitarum prædictis ſectionibus parallelarum, & ſimilium, vt in cylindro; ſiue ad verticem, & centrum baſis terminata, vt in cono, hemiſphærio, & conoide, tranſeat per centra omnium prædictarum ſectionum; ea talis figuræ axis nominetur: ipſa autem figura, ſolidum circa axim. Quæ ſi vel vnam tantum habeat baſim, vel duas inæquales, & parallelas: duarum autem quarumlibet prædictarum ſectionum vertici, vel minori baſi propinquior ſit minor re-

motiori; ſolidum circa axem in alteram partem de ficiens nominetur: quo nomine ſignificari etiam volumus ea ſolida, quorum quælibet ſectiones baſi parallelæ quamuis baſi non ſint omnino ſimi-les, tamen ijs figuris deficiunt, quæ ſunt ſimiles haſi, ac totis ijs, à quibus ipſæ ablatæ intelli-guntur, ita vt tota figura & ablata habeant com-mune centrum in vna recta linea ad centrum ba-ſis terminata, quæ & ipſa talis ſolidi axis nomi-netur.

Vt in figura, ſolidi ABDC deficientis ſolido CED baſis eſt circulus AB, terminus baſi oppoſitus circum-ferentia circuli CMD. axis communis omnibus EF, per cuius quodlibet punctum I plano baſi AB parallelo ſecante ſolidum ABDC, & ablatum CED, & re-ſiduum, eſt totius ſectio circulus G H, ablati vero cir-culus KL, & reſi-dui ſectio reliquum circuli GH dem-pto circulo KL. quarum ſectionum omnium centrum commune eſt I. Quod ſi ſuper duos

[Figure 5]

circulos GH, KL circa axem communem EI cylin-dri deſcribantur, (erunt autem eiuſdem altitudinis) erit reliquum cylindri GB, dempto cylindro cuius baſis KL, axis EI, conſtitutum ſuper baſim G, K, & circa axim EI, quæ ſuo loco expectatur cogitatio.

POSTVLATA.

I.

Omnis figuræ grauis vnum eſſe centrum grauitatis.

II.

Omnium figurarum ſibi mutuo congruentium centra grauitatis mutuo ſibi congruere.

III.

Omnis figuræ, cuius termini omnis cauitas eſt interior, intra terminum eſſe centrum grauitatis.

IIII.

Similium triangulorum ſimiliter poſita eſse centra grauitatis. In triangulis autem ſimilibus ſimiliter poſita puncta eſſe dicuntur, à quibus rectæ ad angulos æquales ductæ cum lateribus homologis angulos æquales faciunt.

V.

Æqualia grauia ab æqualibus longitudinibus ſecundum centrum grauitatis ſuſpenſa æquiponderare.

VI.

A quibus longitudinibus duo grauia æquipon derant, ab ijſdem alia duo quælibet illis æqualia æquiponderare.

PROPOSITIO PRIMA.

Si ſint quotcumque magnitudines inæquales deinceps proportionales; exceſſus, qui bus differunt deinceps proportionales erunt, in proportione totarum magnitudinum.

Sint quotcumque inæquales magnitudines deinceps proportionales AB, CD, EF, & G, differentes exceſſibus BH, DK, FL, minima autem ſit G. Dico BH, DK, FL, deinceps proportionales eſse in proportione, quæ eſt AB, ad CD, ſeu CD, ad EF. Quoniam enim eſt vt AB, ad CD, ita CD ad EF; hoc eſt vt AB, ad AH, ita CD, ad CK, permutando erit, vt AB, ad CD, ita AH, ad CK: vt igitur tota AB, ad totam CD, ita reliqua BH, ad reliquam DK. Similiter oſtenderemus eſse vt CD ad EF, ita DK ad FL; vt igitur BH ad DK, ita erit DK ad FL, in proportione, quæ eſt AB ad CD, & CD ad EF. Quod demonſtrandum erat.

[Figure 6]

PROPOSITIO II.

In omni triangulo vnum dumtaxat punctum eſt, in quo rectæ ab angulis ad latera incidentes ſecant ſeſe in eaſdem rationes. & ſegmenta, quæ ad angulos, ſunt reliquorum dupla. & prædictæ incidentes ſecant trianguli latera bifariam.

Sit triangulum ABC, cuius duo quælibet latera AB, AC, ſint bifariam ſecta in punctis D, E, & ductæ rectæ lineæ BE, CFD, AFG. Dico CF duplam eſſe ipſius FD, & AF, ipſius FG, & BF, ipſius FE. Et in nullo alio puncto à puncto F tres rectas ab angulis ad latera incidentes ſecare ſe ſe in eaſdem rationes. Et reliquum latus BC ſectum eſſe bifariam in puncto G. Quoniam enim eſt vt BA ad AD, ita CA ad AE: hoc eſt, vt triangulum ABC ad triangulum ADC, ita triangulum idem ABC ad triangulum AEB; æqualia erunt triangula ADC, AEB, & ablato trapezio DE communi reliquum triangulum BDF reliquo triangulo CEF æquale erit: ſed triangulum ADF eſt æquale triangulo BDF; & triangulum AFE triangulo EFC, propter æquales baſes, &

[Figure 7]

communes altitudines; totum igitur triangulum AFB toti AFC, triangulo æquale erit: ſed vt triangulum AFB

ad triangulum FBG, hoc eſt vt AF ad FG, ita eſt triangulum AFC ad triangulum FCG; triangulum ergo FBG triangulo FCG æquale erit, & baſis BG baſi GC æqualis. Quoniam igitur & AE eſt æqualis EC, ſimiliter vt ante, oſtenderemus, triangulum BCF, triangulo ACF, eademque ratione triangulum ABF, triangulo BCF æquale eſſe: igitur vnumquodque triangulorum ABF, ACF, BCF, tertia pars eſt trianguli ABC: ſed vt triangulum ABC, ad triangulum BCF, ita eſt AG, ad GF; tripla igitur eſt AG ipſius GF, ac proinde AF, ipſius FG dupla. Eadem ratione BE, ipſius FE, & CF, ipſius FD, dupla concludetur.

Sed ſint ſi fieri poteſt, trianguli ABC duo centra qualia diximus D, E: & ab ipſis ad ſingulos angulos ducantur binæ rectæ lineæ: & eadat D in aliquo triangulo BEC. Quoniam igitur D eſt centrum trianguli ABC erit triangulum BDC tertia pars trianguli ABC. Eadem ratione triangulum BEC tertia pars erit trianguli ABC; triangulum ergo DBC æquale erit triangulo BEC pars toti, quod fieri non poteſt, atqui idem

[Figure 8]

abſurdum ſequitur, ſi punctum D cadat in aliquo latere triangulorum, quorum vertex E; Manifeſtum eſt igitur propoſitum.

PROPOSITIO III.

In ſimilibus triangulis rectæ lineæ, quæ inter centra, & alia in ijs ſimiliter poſita puncta interijciuntur, proportionales ſunt in proportione laterum homologorum.

Sint triangula ſimilia, & ſimiliter poſita ABC, DEF, quorum ſint centra O, P, in ijs autem triangulis ſint puncta ſimiliter poſita K, L, quæ cadant primum in rectis BG, EH, quæ ab angulis æqualibus B, E, baſes bifariam diuidunt. Dico eſſe OK ad PL, vt eſt latus AB, ad latus DE. iunctis enim AK, KC, DL, LF, quo-

[Figure 9]

niam angulus KAC, æqualis eſt angulo LDF, & angulus KCA, angulo LFD, ob ſimiliter poſita puncta K, L, triangulum AKC, triangulo LDF ſimile erit, & vt KA ad AC, ita LD ad DF: ſed vt CA ad AG, ita eſt FD ad DH, expræcedenti; vt igitur KA, ad AG ita erit LD, ad DH, circa æquales angulos: ſimilia igitur ſunt triangula AGK, DHL, & angulus AGK,

æqualis angulo DHL, & vt KG, ad GA, ita LH, ad HD: ſed vt GA, ad AC, ita eſt HD ad DF: & vt AC ad AB, ita DF ad DE, ex æquali igitur erit vt KG ad AB, ita LH ad DE: ſed vt AB ad BG, ita eſt DE ad EH, propter ſimilitudinem triangulorum ABG, DEH: & vt BG ad GO ita eſt EH ad HP, propter triangulorum centra O, P; ex æquali igitur erit vt KG ad GO, ita LH ad HP: & permutando vt OG ad PH, ideſt vt BG ad EH, ideſt vt AB ad ED, ita KG ad LH, & reliqua OK ad reliquam PL.

Sed ſint puncta ſimiliter poſita M, N, quæ cadant extra lineas BG, EH, iunctæque OM, PN. Dico itidem eſse vt AB ad ED, ita OM ad PN. Iungantur enim rectæ MB, NE, quæ cum quibus lateribus homologis angulos æquales faciunt, ea ſint AB, DE, quod propter iſoſcelia triangula ſit dictum in ſimiliter poſitis triangulis. igitur etiam angulus BAM, æqualis erit angulo EDN; ſimilia igitur triangula ABM, DEN: & vt MB ad BA, ita erit NE ad ED: ſed vt AB ad BG, ita eſt DE ad EH, propter ſimilitudinem triangulorum, & vt BG ad BO, ita eſt EH ad EP, ob triangulorum ſimilium centra O, P: ex æquali igitur erit vt MB, ad BO, ita NE ad EP. Rurſus quoniam angulus ABM, æqualis eſt angulo DEN, quorum angulus ABG, æqualis eſt angulo DEH: erit reliquus angulus OBM, æqualis reliquo angulo PEN: ſed vt MB ad BO, ita erat NE ad EP; triangulum igitur OBM triangulo PEN, ſimile erit, & vt BO ad EP, hoc eſt BG ad EH, hoc eſt AB ad DE, ita OM ad PN. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO IV.

Datis duobus triangulis ſcalenis ſimilibus, & dato puncto in altero eorum, vnum duntaxat punctum in reliquo triangulo prædicto puncto ſimiliter poſitum poteſt inueniri.

Sint data duo triangula ſcalena ſimilia ABC, DEF, & in triangulio ABC datum punctum G: ſint autem hæc triangula ſimiliter poſita. Dico in triangulo DEF, vnum duntaxat punctum puncto G ſimiliter poſitum inueniri poſse. Iunctis enim AG, BG, GC, ponatur angulus EDH, æqualis angulo BAG, & angulus DEH,

[Figure 10]

æqualis angulo ABG, & HF iungatur. Manifeſtum eſt igitur ex præcedentis Theorematis demonſtratione, triangula EDH, HDF, FEH, ſimilia eſse triangulis BAG, GAC, CBG, prout inter ſe reſpondent poſitione, quorum ſex triangulorum binis quibuſque binæ baſes homologæ reſpondent: AB ED, AC DF, BC

EF. quæ ſuntin latera homologa duorum triangulorum ABC, DEF. Ex definitione igitur, duo puncta G, H, in triangulis ABC, DEF, ſimiliter poſita erunt. At enim ſi fieri poteſt ſit aliud punctum K, in triangulo DEF, ſimiliter poſitum puncto G. Vel igitur punctum K in aliquo triangulorum, quorum eſt communis vertex H, vel in aliquo eorundem latere cadet. cadat in latere FH, & iungatur DK: triangulum ergo DFK, ſimile erit triangulo ACG. Sed & triangulum EDF, ſimile eſt triangulo BAC; vtraque igitur horum ad illorum ſibi reſpondens triangulorum duplicatam eorundem laterum homologorum AC, DF, habebunt proportionem: vt igitur eſt triangulum EDF, ad triangulum BAC, ita erit triangulum DFK, ad triangulum ACG: & permutando, vt triangulum ACG, ad triangulum ABC, ita triangulum DFK, ad triangulum EDF: eadem ratione, vt triangulum ACG, ad triangulum ABC, ita erit triangulum DFH, ad triangulum DEF: vt igitur triangulum DFK, ad triangulum EDF; ita erit triangulum DFH, ad triangulum EDF; triangulum ergo DFK, triangulo DFH, æquale erit, pars toti, quod eſt abſurdum: idem autem abſurdum ſequeretur, ſi punctum K, poneretur in aliquo prædictorum triangulorum, vt in triangulo DFH; Non igitur aliud punctum à puncto H, in triangulo EDF, ſimiliter poſitum erit puncto G. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO V.

Cuilibet figuræ planæ rectangulum æquale poteſt eſſe.

Sit quælibet figura plana A. Dico figuræ A, rectangulum æquale poſse exiſtere. Exponatur enim rectangulum BC, cuius latus BD, in infinitum producatur verſus E. Quoniam igitur eſt vt rectangulum BD, ad planam figuram A, ita recta BD, ad aliquam lineam rectam ſit vt BC, ad A, ita BD, ad DE, & compleatur rectangulum EC. Quoniam igitur eſt vt BD ad DE, ita rectangulum BC, ad figuram A: ſed vt BD, ad DE, ita eſt

[Figure 11]

rectangulum BC, ad rectangulum CE; vt igitur rectangulum BC, ad figuram A, ita eſt rectangulum BC, ad rectangulum CE; rectangulum ergo CE, figuræ A, æquale erit. Manifeſtum eſt igitur propoſitum.

PROPOSITIO VI.

Omni figuræ circa diametrum in alte ram partem deficienti figura quædam ex parallelogrammis æqualium altitudinum inſcribi poteſt, & altera circumſcribi, ita vt circumſcripta ſuperet inſcriptam minori ſpacio quantacumque magnitudine propoſita. Semper autem in ſimilibus intellige, eiuſdem generis.

Sit figura plana ABC circa diametrum AD, ad par-

tes A deficiens, cuius baſis BC. Dico fieri poſse quod proponitur: ducta enim per verticem figuræ A, baſi BC, parallela, atque ideo figuram ipſam contingente, abſoluatur parallelogrammum BL, ſectaque diametro AD, bifariam, & ſingulis eius partibus ſemper bifariam, ducantur per puncta ſectionum rectæ lineæ baſi BC, & inter ſe parallelæ, atque ita multiplicatæ ſint ſectiones, vt ſecti parallelogrammi in parallelogramma æqualia, & eiuſdem altitudinis quælibet pars, vt parallelogrammum BF, ſit minus ſuperficie propoſita, cuius parallelogrammi latus EF, ſecet figuræ terminum BAC, in punctis GH, & diametrum AD, in puncto K. erit igitur GK, æqualis KH: per omnia igitur puncta ſectionum termini

[Figure 12]

BAC, quæ à prædictis fiunt lineis parallelis, ſi ducantur diametro AD parallelæ, figura quædam ipſi ABC, inſcribetur, & altera circumſcribetur ex parallelogrammis æqualium altitudinum. Dico harum figurarum inſcriptam ſuperari à circumſcripta minori ſpacio ſuperficie propoſita. Quoniam enim omnia parallelogramma, quibus figura circumſcripta ſuperat inſcriptam ſimul ſumpta ſunt æqualia BF parallelogrammo: ſed parallelogrammum BF, eſt minus ſuperficie propoſita: exceſſus igitur quo figura circumſcripta inſcriptam ſuperat, minor erit ſuperficie propoſita. Fieri igitur poteſt, quod proponebatur.

PROPOSITIO VII.

Pyramides ſimilibus, & æqualibus triangulis comprehenſæ inter ſe ſunt æquales.

Sint pyramides ABCD, EFGH, ſimilibus, & æqualibus triangulis comprehenſæ, & ſi ſint ſimiliter poſitæ, quarum vertices A, E, baſes autem triangula BCD, FGH. Dico pyramidem ABCD, pyramidi EFGH, æqualem eſse. A punctis enim A, E, manantia latera inferius producantur, & prædictis lateribus maiores, inter ſe autem æquales abſcindantur AK, AL, AM, EN, EO, EP,

[Figure 13]

& conſtruantur pyramides AKLM, ENOP: pyramides igitur hæ æqualibus, & ſimilibus triangulis comprehenden tur, vt colligitur ex ipſa conſtructione; triangulis igitur inter ſe æquilateris, & æquiangulis KLM, NOP, inter ſe congruentibus non congruat, ſi fieri poteſt, pyramis ENOP, pyramidi AKLM, ſed cadat vertex E, pyramidis ENOP, extra verticem A, pyramidis AKLM, & ex puncto A,

ad centrum circuli tranſeuntis per tria puncta K, L, M, quod ſit R, ducatur recta AR, & ER iungatur. Quoniam igitur æquales rectæ ſunt AK, AL, AM, quæ ex puncto A, in ſublimi pertinent ad ſubiectum planum: & punctum R, eſt centrum circuli tranſeuntis per puncta N, O, P; cadet recta AR ad ſubiectum planum perpendicularis. Eadem ratione recta ER ducta à vertice E, pyramidis ENOP, ad centrum R, circuli tranſeuntis per puncta N, O, P, hoc eſt, per puncta K, L, M, illis congruentia, cadet ad idem planum, ad quod linea AR, perpendicularis; itaque ab eodem puncto R, ad idem planum, & ad eaſdem partes duæ perpendiculares erunt excitatæ, quod fieri non poteſt: punctum igitur E non cadet extra punctum A: quare latus EN, congruet lateri AK, quorum EF, eſt æqualis AK; igitur & EF, ipſi AB, congruet. eadem ratione latus AG, congruet lateri AC, & latus EH, lateri AD, & triangula triangulis, & pyramis EFGH, pyramidi ABCD, & ipſi æqualis erit. Quod demonſtrandum erat.

COROLLARIVM.

Hinc facile colligitur omnia ſolida, quæ in pyramides æqualibus, & ſimilibus triangulis comprehenſas multitudine æquales diuidi poſſunt, eſſe inter ſe æqualia. Quocirca omnia priſmata, & pyramides, & octahedra, omnia denique corpora regularia æqualibus, & ſimilibus planis comprehenſa inter ſe æqualia erunt.

PROPOSITIO VIII.

Omnis pyramidis triangulam baſim habentis quatuor axes ſecant ſe in vno puncto in eaſdem ra-

tiones, ita vt ſegmenta, quæ ad angulos, eorum, quæ ad oppoſita triangula, ſint tripla; ex quo puncto tota pyramis diuiditur in quatuor pyrami des æquales. Et in nullo alio puncto quatuor rectæ lineæ ductæ ab angulis ad triangula oppoſita pyramidis ſecant ſeſe in eaſdem rationes. Vocetur autem punctum hoc centrum dictæ pyramidis.

Sit pyramis ABCD, cuius vertex A, baſis autem triangulum BCD, axes AE, BM, CL, DN, vnde quatuor triangulorum, quæ ſunt circa pyramidem ABCD, centra erunt grauitatis E, L, M, N. Dico quatuor lineas AE, BM, CL, DN, ſecare ſe ſe in vno puncto in eaſdem rationes, quas prædixi, & quæ ſequuntur. Nam ex puncto A, ducatur recta ALH, quæ ob trianguli ABD, centrum L, ſecabit latus BD, bifariam in puncto H; iuncta igitur CE, & producta conueniet cum ALH, vt in puncto H. eadem ratione iunctæ AM, BE, & productæ conuenient in medio lateris CD, conueniant in puncto K, necnon AN, DE, in medio ipſius BC, vt in puncto G. Quoniam igitur ob triangulorum centra, eſt vt CE ad EH, ita AL ad LH, dupla enim eſt vtraque vtriuſque, ſecabunt ſeſe rectæ AE, CL, inter eaſdem parallelas; quare vt AF ad FE, ita erit CF ad FL, circum æquales angu los ad verticem: triangula igitur AFL, CFE; & reciproca, & æqualia inter ſe erunt. Cum igitur ſit vt AL ad LH, ita CE ad EH, hoc eſt vt triangulum AFL ad triangulum FLH, (ſi ducatur FH) ita triangulum CFE, ad triangulum FEH, erunt inter ſe æqualia triangula FEH, FLH. Quare vt triangulum AFH, ad triangulum FLH, hoc eſt vt AH ad HL, ita erit triangulum AFH ad triangulum FEH, hoc eſt AF ad FE: ſed recta AH, eſt tripla ipſius LH; igitur & AF, erit ipſius FE,

tripla: ſed vt AF, ad FE, ita eſt CF, ad FL; tripla igitur erit CF, ipſius FL. Similiter oſtenderemus rectas AE, BM, ſecare ſe ſe in eaſdem rationes, ita vt ſegmenta, quæ ad angulos, ſint tripla eorum, quæ ſunt ad centra E, M, quorum AF, eſt tripla ipſius FE: in puncto igitur F, ſecant ſe rectæ lineæ AE, BM. Eadem ratione & rectæ AE, DN, ſecent ſe in puncto F, neceſse erit: quare vt AF ad FE, ita erit DF ad FN. Quatuor igitur axes pyramidis ABCD, ſecantſe ſe in puncto F, in eaſdem rationes, ita vt ſegmenta ad angulos, ſint reliquorum tripla. Rurſus, quia componendo, & conuertendo, eſt vt FE ad EA, ita FL ad LC: hoc eſt, vt pyramis BCDF, ad pyramidem ABCD, ita pyramis ABDF, ad pyramidem CBDA, (propter baſium communitatem, & vertices in eadem recta linea) erit

[Figure 14]

pyramis ABDF, æqualis pyramidi BCDF. Eadem ratione tam pyramis ACDF, quàm pyramis ABCF, æqualis eſt pyramidi BCDF. Quatuor igitur pyramides, quarum communis vertex punctum F, baſes autem triangula, quæ ſunt circa pyramidem ABCD, inter ſe æquales erunt, & vnaquæque pyramidis ABCD, pars quarta. Dico in nullo alio puncto à puncto F, quatuor rectas, quæ ab angulis ad triangula oppoſita pyramidis ABCD, ducantur, ſecare ſe in eaſdem rationes. Si enim fieri poteſt ſecent ſe tales rectæ in eaſdem rationes in alio puncto S. Simi-

liter igitur vt ante oſtenderemus, vnamquamque quatuor pyramidum, quarum communis vertex S, baſes autem triangula, quæ ſunt circa pyramidem ABCD, eſse quartam partem pyramidis ABCD. Siue igitur punctum S, cadat intra vnam priorum quatuor pyramidum, ſiue in earum aliquo latere, ſeu triangulo; neceſſario erit pars æquali toti; tam enim tota vna pyramis quatuor priorum, quarum communis vertex F, quàm eius pars, vna quatuor pyramidum poſteriorum, quarum communis vertex S, erit eiuſdem ABCD, pyramidis pars quarta. Ex abſurdo igitur non in alio puncto à puncto F ſecabunt ſe in eaſdem rationes quatuor rectæ, quæ ab angu lis ad oppoſita triangula pyramidis ABCD, ducantur. Manifeſtum eſt igitur propoſitum.

PROPOSITIO IX.

Omnis pyramis baſim habens triangulam diuiditur in quatuor pyra mides æquales, & ſimiles inter ſe, & toti, & vnum octaedrum totius pyramidis dimidium, ip ſi que concentricum.

Sit pyramis ABCD, cuius baſis triangulum ABC, ſectisque omnibus lateribus bifariam, iungantur rectæ FG, GH, HF, FK, KL, LM, MK, KH, HM, GL, LF. Dico quatuor pyramides DKLM, LFBG, KHFA, MHGC, æquales eſse, & ſimiles inter ſe, & toti pyramidi ABCD: octaedrum autem eſse LFGMKH, & dimidium pyramidis ABCD, ipſique concentricum. Ducantur enim rectæ DNH, BQH, LN: & poſita BE, du pla ipſius BH, iungatur DOC, in triangulo DBH, & ponatur DP, ipſius PE, tripla, & connectantur rectæ LP, PH. Quoniam igitur E, eſt centrum trianguli ABC,

erit axis DE, pyramidis ABCD, cuius axis ſegmentum DP eſt triplum ipſius PE: igitur P centrum erit pyramidis ABCD. Et quoniam tres rectæ FK, KH, HF, ſunt parallelæ tribus BD, DC, CB, pro vt inter ſe reſpondent, vt KH, ipſi LG, quoniam vtraque lateri DC, ob latera triangulorum ſecta proportionaliter in punctis K, H, L, G: & ſic de reliquis; erit pyramis AKFH, ſimilis toti pyramidi ABCD. Similiter vnaquæque trium aliarum pyramidum abſciſſarum, videlicet FLBG, GHMC, KDLM, ſimilis erit pyramidi ABCD, atque ideo inter ſe ſimiles. Rurſus, quoniam pyramidum ſimilium latus AD eſt duplum lateris AK, homologi; pyramis ABCD, octupla erit pyramidis AKFH, ob triplicatam laterum homologorum proportionem. Similiter vnaqunæque trium reliquarum pyramidum abſciſſarum erit octaua pars pyramidis ABCD;

[Figure 15]

quatuor igitur pyramides abſciſſæ ſimul ſumptæ dimidium erit pyramidis ABCD: & reliquum igitur ſolidum demptis quatuor pyramidibus, dimidium pyramidis ABCD. Dico reliquum ſolidum LKMGFH, eſſe octaedrum. Nam octo triangulis ipſum contineri manifeſtum eſt. bina autem oppoſita eſſe parallela, & æqualia, & ſimilia, ſic oſtendimus. Quoniam enim triangulum FGH, eſt in plano trianguli ABC, plano trianguli KLM parallelo; erit triangulum FGH, parallelum triangu-

lo KLM: ſed triangulum FGH, eſt ſimile triangulo ABC, & triangulum KLM, ſimile eidem triangulo ABC; triangulum ergo FGH, ſimile erit triangulo KLM: ſed & æquale propter æqualitatem laterum homologorum. Similiter oſtenderemus reliquum ſolidum LKM GFH continentia triangula bina oppoſita æqualia inter ſe, & ſimilia, & parallela; octaedrum eſt igitur LKMGFH. Dico iam punctum P, quod eſt centrum pyramidis ABCD, eſse centrum octaedri LK MGFH. Quoniam enim DP, ponitur tripla ipſius PE, & DO, eſt æqualis OE (ſiquidem planum trianguli KLM, plano trianguli ABC, paralle lum ſecat proportione oens rectas lineas, quæ ex puncto D, in ſublimi pertinent ad ſubiectum planum trianguli ABC) erit OP, ipſi PE, æqualis. Et quoniam BH eſt dupla ipſius QH, quarum BE eſt dupla ipſius

[Figure 16]

EH, ſiquidem E eſt centrum trianguli ABC; erit reliqua EH reliquæ EQ dupla: & quia eſt vt LD ad DB, ita LN ad BH, propter ſimilitudinem triangulorum, & eſt LD, dimidia ipſius BD, erit & LN, dimidia ipſius BH: ſed QH eſt dimidia ipſius BH; æqualis igitur LN ipſi QH. Iam igitur quia eſt vt BE ad EH, ita LO ad ON: ſed BE, eſt dupla ipſius EH; dupla igitur LO, erit ipſius ON: ſed & QH erat dupla ipſius QE; vt igitur LN ad NO, ita erit HQ ad QE: &

per conuerſionem rationis, vt NL ad LO, ita QH, ad HE: & permutando, vt LN ad QH, ita LO ad EH: ſed LN, oſtenſa eſt æqualis QH; æqualis igitur LO, erit ipſi EH; ſed & OP, eſt æqualis ipſi PE, vt oſtendimus: duæ igitur LO, OP, duabus HE, EP æquales erunt altera alteri, & angulos æquales continent LOP, PEH, parallelis exiſtentibus LN, BH ſectionibus trianguli DBH, quæ fiunt à duobus planis parallelis; baſis igitur LP, trianguli LOP, æqualis eſt baſi PH, trianguli PEH, & angulus OPL, angulo EPH in plano trianguli DBH, in quo DPE, eſt vna recta linea; igitur LPH, erit vna recta linea, quæ cum ſit axis octaedri LKMGFH, & ſectus ſit in puncto P, bifariam, erit punctum P, centrum octaedri LKMGEH. ſed & centrum pyramidis ABCD. Manifeſtum eſt igitur propoſitum.

PROPOSITIO X.

Omne fruſtum pyramidis triangulam baſim habentis, ſiue coni, ad pyramidem, vel conum, cuius baſis eſt eadem, quæ maior baſis fruſti, & eadem altitudo, eam habet proportionem, quam duo latera homologa, vel duæ diametri baſium ipſius fruſti, vnà cum tertia minori proportionali ad prædicta duo latera, vel diametros; ad maioris baſis latus, vel diametrum. Ad priſma autem, vel cylindrum, cuius eadem eſt baſis, quæ maior baſis fruſti, & eadem altitudo; vt tres prædictæ deinceps proportionales ſimul, ad triplam lateris, vel diametri maioris baſis.

Sit fruſtum ABCFGH, pyramidis, vel coni ABCD, cuius baſis triangulum, vel circulus ABC, axis autem DE: & vt eſt AC ad FH, ita ſit FH ad N, & fruſti axis EK, nec non idem pyramidis, vel coni AB CK, vt ſit eadem altitudo. Dico fruſtum ABCF GH, ad pyramidem, vel conum, ABCK, eſse vt tres lineas AC, FH, NO, ſimul ad ipſius AC, triplam: ad priſma autem, vel cylindrum, cuius baſis ABC, altitudo autem eadem cum fruſto, vttres AC, FH, NO, ſimul, ad ipſius AC, triplam. Nam vt eſt AC ad FH, & FH ad NO, ita ſit NO ad P: & exceſſus, quo hæ

[Figure 17]

quatuor lineæ differunt, ſint AL, FM, Oque Ergo vt AC ad FH, ita erit AL ad FM, & FM ad Oque Quoniam igitur eſt vt AC ad P, ita pyramis, vel conus ABCD, ad ſimilem ipſi pyramidem, vel conum DFGH, ob triplicatam laterum homologorum proportionem; erit diuidendo, vt tres AL, FM, OQ, ſimul ad P, ita fruſtum ABCFGH, ad pyramidem, vel conum DFGH: ſed conuertendo eſt vt P, ad AC, ita pyramis, vel conus DFGH, ad pyramidem, vel conum ABCD: ex æquali igitur, vt tres AL, FM, OQ, ſimul ad AC, ita fruſtum

ABCDFGH, ad pyramidem, vel conum ABCD. Rurſus quoniam axis DE, & latera pyramidis, vel coni ABCD, ſecantur plano trianguli, vel circuli FGH, baſi ABC, parallelo; erit componendo, vt AD, ad DF, hoc eſt, vt AC ad FH, propter ſimilitudinem triangulorum, hoc eſt vt AC, ad CL, ita ED, ad DK; & per conuerſionem rationis, vt AC, ad AL, ita DE, ad EK: ſed vt DE ad EK, ita eſt pyramis, vel conus ABCD, ad pyramidem, vel conum ABCK; vt igitur AC, ad AL, ita eſt pyramis, vel conus ABCD, ad pyramidem, vel conum ABCK; ſed vt tres lineæ AL, FM, OQ ſimul ad AC, ita erat fruſtum ABCFGH, ad pyramidem, vel conum ABCD; ex æquali igitur, erit vt tres lineæ AL, FM, OQ, ſimul ad AL, ita fruſtum ABCFGH, ad pyramidem, vel conum ABCK. Rurſus, quoniam tres exceſſus AL, FM, OQ, ſunt deinceps proportionales in proportione totidem terminorum AC, FH, NO, erunt vt AL, FM, OQ, ſimul ad AL, ita AC, FH, NO, ſimul ad AC: ſed vt AL, FM, OQ, ſim ul ad AL, ita erat fruſtum ABCFGH, ad pyamidem, vel conum ABCK; vt igitur tres lineæ AC, FH, NO, ſimul, ad AC, ita erit fruſtum ABCFGH, ad pyramidem, vel conum ABCK. Sed vt AC, ad ſui triplam, ita eſt pyramis, vel conus ABCK ad priſma, vel cylindrum, cuius eſt eadem baſis ABC, & eadem altitudo cum pyramide, vel cono ABCK; ex æquali igitur, erit vt tres lineæ AC, FH, NO, ſimul ad ipſius AC, triplam, ita fruſtum ABCFGH, ad priſma, vel cylindrum, cuius baſis ABC, & eadem altitudo pyramidi, vel cono ABCK: ideſt eadem, fruſto ABCFGH. Manifeſtum eſt igitur propoſitum.

PROPOSITIO XI.

Omni ſolido circa axim in alteram partem defi cienti, cuius baſis ſit circulus, vel ellypſis, figura quædam ex cylindris, vel cylindri portionibus æqualium altitudinum inſcribi poteſt, & altera circumſcribi, ita vt circumſcripta ſuperet inſcriptam minori exceſſu quacumque magnitudine propoſita.

Sit ſolidum ABC, circa axim AD, in alteram partem deficiens, cuius vertex A, baſis autem circulus, vel ellypſis, cuius diameter BC. Igitur ſuper hanc baſim circa axim AD, intelligatur deſeri ptus cylindrus, vel cylindri portio BL, quæ ſolidum ABC, comprehendet: ſectoque cylindro, vel cylin dri portione BL, planis baſi paralle

[Figure 18]

lis in tot cylindros, vel cylindri portiones æqualium altitudinum, vt quilibet eorum ſit minor magnitudine propoſita; eſto ſolidum ABC, ſectum prædictis planis: erunt autem ſectiones circuli, vel ellypſes ſimiles inter ſe & baſi BC, ſolidi ABC ſuper quas ſectiones tamquam baſes cylindris, vel cylindri portionibus æqualium altitudinum intra, atque extra figuram conſtitutis, quorum bini inter eadem plana parallela inter ſe refe-

runtur, veluti BF, & GDH, quorum axis communis eſt DK, baſes autem circuli, vel ellypſes EF, GH, quarum commune centrum K: ſupremus autem, qui ad A, ad nullum refertur. Quoniam igitur ex conſtructione, cylindrus, vel cylindri portio BF, eſt minor magnitudine propoſita; exceſsus autem omnes, quibus cylindri, ex quibus conſtat figura circumſcripta, excedunt eos, ex quibus conſtat figura inſcripta, pro vt bini inter ſe referuntur, vna cum ſupremo, qui ad nullum refertur, ſunt æquales cylindro, vel cylindri portioni BF, figura circumſcripta ſolido ABC, excedet inſcriptam minori exceſſu magnitudine propoſita. Fieri igitur poteſt quod proponebamus.

PROPOSITIO XII.

Dato parallelepipedo erecto circa datam rectam lineam tamquam axim, erectum parallelepipedum æquale conſtituere.

Sit datum parallelepipedum AB, erectum, cuius baſis AC, altitudo autem latus BC: & data recta linea finita ED. Oportet circa rectam ED, tamquam axim parallelepipedo AB, æquale parallelepipedum erectum conſtituere. Per punctum igitur E, extendatur planum erectum ad lineam ED, & vt eſt DE, ad BC, ita fiat baſis AC, ad quadratum F: & ad punctum E, in plano erecto ad lineam ED, quartæ parti quadrati F, æquale GE, quadratum deſcribatur, & compleatur quadratum GH, quadruplum quadrati EG, ſeu quadrato F, æquale: & ex puncto K, erecta KL, ipſi EF, æquali, & ad ſubiectum planum perpendiculari ſuper baſim GH, conſtituatur parallelepipedum GK. Dico

parallelepipedum GK, eſse æquale parallelepipedo AB; & rectam DE, axim parallelepipedi GK. Iungantur enim baſium oppoſitarum diametri GH, LK. Quoniam igitur quadrata ſunt EG, GH, communemque habent angulum, qui ad G, conſiſtent circa diametrum GH; in recta igitur GH, erit punctum E. Et quoniam quadratum GH, eſt quadrati EG, quadruplum; erit dia-

[Figure 19]

meter GH, diametri EG, dupla; punctum igitur E, erit in medio diametri GH. Rurſus, quoniam ob parallelepipedum GK, recta GL, æqualis eſt, & parallela ipſi KH, erit LH, parallelogrammum: & quia vtraque DE, KH, eſt ad ſubiectum planum perpendicularis, parallelæ erunt, & in eodem plano parallelogrammi LH; in quo cum LG, ſit parallela ipſi KH; erit & ED, ipſi LG, parallela: eſt autem, & æqualis vtrilibet ipſarum GL, GH, oppoſitarum; punctum igitur D, eſt in recta LK, & tam KD, ipſi EH, quàm LD, ipſi EG, æqualis erit, & inter ſe æquales LD, DK. punctum igitur D, erit in medio diametri LK; ſed & punctum E, erat in medio diametri GH; recta igitur ED, axis eſt parallelepipedi GK, cuius parallelepipedi cum altitudo DE, ſit ad BC, altitudinem parallelepipedi AB, vt eſt baſis AC, ad quadratum F, hoc eſt ad baſim GH, parallelepipedi GK; parallelepipedum GK, parallelepipe do AB, æquale erit, Factum igitur eſt quod oportebat.

PROPOSITIO XIII.

Cuilibet figuræ ſolidæ parallelepipedum æquale poteſt eſſe.

Sit quælibet figura ſolida A. Dico ſolido A, parallelepipedum æquale poſse exiſtere. Exponatur enim parallelepipedum BC, cuius baſis BG. Quoniam igitur eſt vt ſolidum BC, ad ſolidum A, ita recta linea, ſiue latus BD, ad aliam rectam lineam; producto latere BD, ſit vt BC, ad A, ita recta BD, ad rectam DE, & compleatur parallelepipedum CE. Quoniam itaque eſt vt BD, ad DE, ita parallelogrammum ſiue baſis BG, ad parallelogram-

[Figure 20]

mum, ſiue baſim EG; hoc eſt parallelepipedum BC, ad parallelepipedum CE: ſed vt BD, ad DE, ita eſt parallelepipedum BC, ad ſolidum A; vt igitur parallelepipedum BC, ad ſolidum A, ita erit parallelepipedum BC, ad parallelepipedum CE; parallelepipedum igitur CE æquale erit ſolido A. Quod fieri poſse propoſuimus.

Omnis parallelogtammi centrum grauitatis diametrum bifariam diuidit.

Sit parallelogrammum ABCD, cuius duo latera AB, BC, ſint primum in æqualia: & quoniam omne parallelogrammum habet ſaltem duos angulos oppoſitos non minores recto, eſto vterque angulorum B, D, non minor recto, ſitque ducta diameter AC, ſectaque in puncto G, bifariam. Dico G, eſse centrum grauitatis parallelogrammi ABCD. Trianguli enim ABC, ſit centrum grauitatis H; iunctaque HG, & producta, ponatur GK, æqualis GH, & rectæ à punctis K, H, ad angulos ducantur. Quoniam igitur AG, eſt æqualis GC, & GH, ipſi GK, & angulus AGK, æqualis angulo CGH, erit baſis AK, æqualis baſi CH, & angulus GAK, æqualis angulo GCK: ſed totus angulus DAK, æqualis eſt toti angulo BCA; reliquus igitur DAK, reliquo BCH, æqualis erit, circa quos angulos latus BC eſt æquale lateri AD, & CH, ipſi AK; angulus igitur CBH, æqualis erit

[Figure 21]

angulo ADK. Similiter oſtenderemus angulum CAH, angulo ACK, & angulum BAH, angulo DCK, & angulum ABH, angulo CDK, æquales eſse: ſed latera triangulorum, cum quibus rectæ ductæ à punctis K, H, ad angulos triangulorum ſimilium ABC, CDA, ſunt ho-

mologa; puncta igitur K, H, in prædictis triangulis ſunt ſimiliter poſita. Rurſus quoniam angulus ABC, non eſt minor recto, acuti erunt reliqui ACB, BAC; igitur latus AC, maximum erit: ponitur autem AB maius, quàm BC; triangulum igitur ABC, ſcalenum erit. Eadem ratione ſcalenum eſt triangulum ACD. Quare in triangulo ACD, vnum duntaxat punctum K, ſimiliter poſitum erit, ac punctum H, in triangulo ABC. Cum igitur H ſit centrum grauitatis trianguli ABC, erit & K, centrum grauitatis trianguli ACD. Sed longitudo GK, æqualis eſt longitudini GH; punctum igitur G erit centrum grauitatis parallelogrammi ABCD, in quo nimirum ſecta eſt bifariam diameter AC: quare ſi ducatur altera diameter BD, in medio etiam diametri BD, erit idem centrum grauitatis G.

Sed ſint omnia latera æqualia parallelogrammi ABCD, Sectisque duobus lateribus AD, BC, bifariam in E, F iungantur EF, AE, ED, AGC, & per punctum G, ducatur ipſi AD, vel BC, parallela HGK. Quoniam igitur EC, eſt æqualis AF, erit CG æqualis AG, & EG, æqualis GF, propter ſimilitudinem triangulorum: nec non EH, ipſi AH, & EK, ipſi KD: tres igitur diametri AC, AE, ED, erunt ſectæ bifariam

[Figure 22]

in punctis K, G, H: & quoniam ex æquali propter triangula ſimilia eſt vt AF, ad FD, ita HG, ad GK, erit HG, æqualis ipſi GK: ſed puncta K, H, ſunt centra grauitatis parallelogrammorum BF, FC; igitur totius parallelogrammi ABCD, centrum grauitatis erit G, in medio

diametri AG. Quod eſt propoſitum.

COROLLARIVM.

Hinc manifeſtum eſt, omnis parallelogrammi centrum grauitatis eſſe in medio rectæ, quæ oppoſitorum bipartitorum laterum ſectiones iungit.

PROPOSITIO XV.

Si quodlibet parallelogrammum in duo parallelogramma diuidatur, & eorum centra grauitatis iungantur recta linea; totius diuiſi parallelogrammi centrum grauitatis prædictam lineam ita diuidit, vt eius ſegmenta è contrario reſpondeant prædictis partibus parallelogrammis.

Sit parallelogrammum ABCD, ſectum in duo parallelogramma AE, ED, & parallelogrammi AE, ſit centrum grauitatis H, parallelogrammi autem ED, centrum grauitatis K: & parallelogrammi ABCD, ſit centrum grauitatis G: & iungatur KH. Dico rectam KH, diuidi à puncto G, ita vt ſit KG, ad GH, vt eſt parallelogrammum AE, ad parallelogrammum

[Figure 23]

ED, Iungantur enim diametri AC, AE, ED. Igitur

per præcedentem ſectæ erunt hæ diametri bifariam in punctis H, G, K. Quoniam igitur eſt vt EH, ad HA, ita EK ad KD, parallela erit KH, ipſi AD; igitur & EC; ſed recta KH, ſecat latus AE, trianguli AEC, bifariam in puncto H, ergo & latus AC, bifariam ſecabit; igitur in puncto G. punctum igitur G, eſt in linea KH. Rurſus, quoniam eſt vt GA, ad AC, ita GH, ad EC, propter ſimilitudinem triangulorum; ſed dimidia eſt GA, ipſius AC, igitur & GH, erit dimidia ipſius EC, hoc eſt ipſius FD. Similiter oſtenderemus dimidiam eſse KH ipſius AD. vt igitur KH, ad AD, ita erit GH, ad FD: & permutando, vt AD, ad DF, ita KH, ad HG, & diuidendo, vt AF, ad FD, hoc eſt vt parallelogrammum AE, ad parallelogrammum ED, ita KG, ad GH. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XVI.

Plana grauia æquiponderant à longitudinibus ex contraria parte reſpondentibus.

Sint plana grauia N, R, quorum centra grauitatis ſint N, R, & longitudo aliqua AB: & vt eſt N, ad R, ita ſit BC, ad CA. Dico ſuſpenſis magnitudinibus ſecundum centra grauitatis N, in puncto A, & R, in puncto B, vtriuſque magnitudinis N, R, ſimul centrum grauitatis eſse C. Nam ſi N, R, magnitudines ſint æquales, manifeſtum eſt propoſitum. Si autem inæquales, abſcindatur BD, æqualis AC, vt ſit AD, ad DB, vt BC, ad CA. Et quoniam ſpacio R, rectangulum æquale poteſt eſse; applicetur ad lineam BD, rectangulum BDKE, æquale quartæ parti rectanguli æqualis ipſi R, hoc eſt quartæ parti ipſius R; & poſita DG, æquali, & in directum ipſi DK,

ducantur rectæ GBH, GAF, quæ cum KE, producta conueniant in punctis F, H: & fiant parallelogramma FL, AK. Quoniam igitur eſt vt N, ad R, ita BC, ad CA, hoc eſt AD, ad DB, hoc eſt rectangulum AK, ad rectangulum BK; erit permutando vt rectangulum AK, ad N, ita rectangulum BK, ad R; ſed rectangulum BK, eſt pars quarta ipſius R, ergo & rectangulum AK, erit pars quarta ipſius N. Rurſus quia eſt vt GD, ad DK, ita GA, ad AF, & GB, ad BH: ſed GD eſt æqualis DK; ergo & GA, ipſi AF, & GB, ipſi BH, æquales erunt & centra grauitatis A, quidem rectanguli MK, B, vero rectanguli KL, & rectangulum AK, pars quarta ipſius MK, quemadmodum & BK ipſius KL; ſed N, rectanguli AK, quadruplum erat, quemadmodum & R ipſius BK; igitur rectangulum MK, ſpacio N, & rectangulum KL, ſpacio R, æquale erit. Sed vt BC, ad CA, ita eſt N, ad R; vt igitur BC, ad CA, ita

[Figure 24]

rectangulum MK, ad rectangulum KL; ſed A eſt centrum grauitatis rectanguli MK, & B, rectanguli KL; totius ergo rectanguli FL, hoc eſt duorum rectangulorum MK, KL, ſimul centrum grauitatis erit C. Sed rectangulo MK, æquale eſt ſpacium N; & rectangulo KL, ſpacium R. Igitur ſi pro rectangulo MK, ſit ſuſpenſum N ſpacium ſecundum centrum grauitatis in puncto A, & pro rectangulo KL, ſpacium R, ſecundum centrum graui-

tatis in puncto B, ſpacia N, R, æquiponderabunt à longitudinibus AC, CB; eritque vtriuſque plani N, R, ſimul centrum grauitatis C. Quod demonſtrandum erat.

COROLLARIVM.

Hinc manifeſtum eſt ſi cuiuslibet figuræ planæ vtcumque ſectæ centra grauitatis partium iungantur recta linea, talem lineam à centro grauitatis totius prædicti plani ita ſecari, vt ſegmenta ex contrario reſpondeant prædictis partibus.

PROPOSITIO XVII.

Si totum quoduis planum, & pars aliqua non habeant idem centrum grauitatis, & eorum centra iungantur recta linea; in ea producta ad partes centri grauitatis totius, erit reliquæ partis centrum grauitatis.

Sit totum quoduis planum ABC, cuius centrum grauitatis E, & pars illius AB, cuius aliud centrum D, & iuncta DE, producatur ad partes E, in infinitum vſque in H. Dico reliquæ partis BC, centrum grauitatis, quod ſit G, eſse in linea EH. Quoniam enim D, G, ſunt centra grauitatis par-

[Figure 25]

tium AB, BC, cadet totius ABC, centrum grauitatis

E, in recta linea, quæ iungit centra D, G; tria igitur puncta D, E, G, ſunt in eadem recta linea. in qua igitur ſunt puncta D, E, in eadem eſt punctum G; ſed puncta D, E, ſunt in recta DH; igitur & punctum G, erit in recta DH: ſed extra ipſam DE, vt modo oſtendimus, in reliqua igitur EH. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XVIII.

Sit totum quoduis planum ſit vni parti concentricum ſecundum centrum grauitatis, & reliquæ erit concentricum. Et ſi partes inter ſe ſint concentricæ, & toti erunt concentricæ.

Sit totum quoduis planum AB, quod cum vna parte AC habeat commune centrum grauitatis E. Dico & reliquæ partis CD, eſse idem centrum grauitatis E. Si enim illud non eſt, erit aliud; eſto F, & EF iungatur. Quoniam igitur partium AC, CD, centra grauitatis ſunt E, F; erit totius AB, in recta EF, centrum grauitatis: ſed & in puncto E, vnius ergo magnitudinis duo centra grauitatis erunt. Quod eſt abſurdum;

[Figure 26]

idem igitur E erit centrum grauitatis vtriuslibet partium AC, CD. Sed vtriuslibet partium AC, CD, ſit centrum grauitatis E. Dico idem E totius AB, eſse cen-

trum grauitatis. Si enim non eſt, erit aliud, eſto G: & iunctatur EG, producatur ad partes G, in infinitum vſque ìn F. Quoniam igitur E, eſt centrum grauitatis vnius partis AC, & G, totius AB; erit reliquæ partis CD, in linea GF centrum grauitatis: ſed & in puncto E; eiuſdem igitur magnitudinis AB, duo centra grauitatis erunt. Quod fieri non poteſt; totius igitur AB, erit centrum gra uitatis idem E. Manifeſtum eſt igitur propoſitum.

PROPOSITIO XIX.

Omnis trianguli rectilinei idem eſt centrum grauitatis, & figuræ.

Sit triangulum rectilineum ABC, cuius centrum G. Dico G, eſse centrum grauitatis trianguli ABC. Si enim fieri poteſt, ſit aliud punctum N, centrum grauitatis trian guli ABC, & per punctum G, ducantur rectæ AF, BD, CE, & DHE, ERF, FKD, KLH, & NG. Quoniam igitur quæ ab angulis A, B, C, ductæ ſunt rectæ lineæ per G, ſecant bifariam latera AB, BC, CA; erit triangulum EDF, ſimile triangulo ABC, ob latera parallela vt ſunt EF, AC. Et quoniam triangulum EDF, dimidium eſt cuius vis trium parallelogrammorum AF, BD, CE, æqualia inter ſe erunt ea parallelogramma omnifariam ſumpta, quorum centra grauitatis H, K, R; intelligantur autem tria parallelogramma AF, BD, CE, diſtincta penitus, ita vt inter ſe congruant ſecundum tria triangula DEF, inter ſe congruentia: trium igitur trian gulorum DEF, inter ſe congruentium & centra grauitatis inter ſe congruent in puncto M. Quoniam igitur inter duas parallelas EF, KH, ſecant ſe rectæ lineæ FH, LR, in puncto G; erit vt FG, ad GH, ita RG, ad GL;

dupla igitur RG, eſt ipſius GL. Et quoniam in triangulo AGC, recta GD, ſecat AC, bifariam in puncto D; ipſi AC, parallelam KH, bifariam ſecabit in puncto L, duorum igitur æqualium parallelogrammorum AF, EG; ſimul, quorum centra grauitatis ſunt K, H, centrum grauitatis erit L. Sed duo parallelogramma AF, EC, ſimul ſunt parallelogrammi BD, duplum; trium igitur parallelogrammorum AF, EC, BD, ſimul: hoc eſt trianguli ABC, vnà cum duobus trium triangulorum inter ſe congruentium EDF, centrum grauitatis erit G. Sed triangu li ABC, ponitur

[Figure 27]

centrum grauitatis N; producta igitur NG, occurret centro M, reliquæ partis, ideſt duorum triangulorum DEF; quare vt triangulum ABC, ad duo triangula DEF, ſimul, ita erit MG, ad GN. Sed triangulum ABC, eſt duplum duorum triangulorum EDF: igitur & MG, erit ipſius GN, dupla. Rurſus quoniam vtriuslibet duorum triangulorum EDF, centrum grauitatis erat M; erit ſimiliter poſitum M, in triangulo EDF, ac centrum N, in triangulo ABC, propter ſimilitudinem triangulorum: Sed propter hæc ſimiliter poſita centra, quia homologorum laterum eſt vt AB, ad DF, ita NG, ad GM: & AB, eſt dupla ipſius EB, erit & NG, dupla ipſius GM. Sed GM, erat dupla ipſius GN: igitur GN, erit ſui ipſius quadrupla. Quod eſt abſurdum. Non igitur centrum

grauitatis trianguli ABC, erit aliud à puncto G: punctum igitur G, erit centrum grauitatis trianguli ABC. Quod demonſtrandum erat.

Quod autem ex huius theorematis demonſtratione liquet centrum grauitatis trianguli eſse in ea recta linea, quæ ab angulo ad bipartiti lateris ſectionem pertinet, Archimedes per inſcriptionem figuræ ex parallelogrammis demonſtrauit, aliter autem per diuiſionem trianguli in triangula nequaquam: qua enim ratione hoc ille tentat, ea ex nono theoremate eiuſdem prioris libri de æquiponderantibus neceſsario pendet. Cum igitur in illo ante ceden ti ſit fallacia accipientis latenter ſpeciem trianguli; ſcalenum ſcilicet pro genere triangulo, neque conſequens erit demonſtratum. Quod autem dico manifeſtum eſt: Datis enim duobus triangulis ſimilibus, & in altero eorum dato puncto, quod ſit trianguli centrum grauitatis, punctum in altero triangulo modo ſimiliter poſitum ſit prædicto puncto, nititur demonſtrare eſse alterius trianguli centrum grauitatis: cum autem nondum conſtet centrum grauitatis trianguli eſse in recta, quæ ab angulo latus oppoſitum bifariam ſecat, ſed ex nono theoremate ſit demonſtran dum medio decimo, non poteſt illud accipi in nono theoremate, quod ad demonſtrationem eſset neceſsarium. permittitur igitur aduerſario ponere centrum grauitatis trianguli, vbicumque vult intra illius limites. atqui cum datis duobus triangulis iſoſceliis ſimilibus, & in altero eorum dato puncto, quod non ſit in prædicta recta linea, poſsint in altero duo puncta prædicto ſimiliter poſita inueniri, quorum vnum duntaxat concedet aduerſarius eſse alterius trianguli centrum grauitatis, non autem non ſimiliter poſitum, ex quo abſurdum infertur partem anguli æqualem eſse toti: quid quod datis duobus triangulis æquilateris, & in altero eorum dato puncto, quod non ſit centrum trian-

guli, ſed aliqua earum, quæ ab angulis ad bipartitorum laterum ſectiones cadunt, neceſse eſt in altero triangulo tria puncta prædicto puncto eſse ſimiliter poſita? quod ſi etiam extra iſtas lineas cadat vnius trianguli punctum, neceſse eſt illi ſex puncta in altero triangulo eſse ſimiliter poſita: ſed ſi quod diximus de iſoſceliis ſimilibus, & æquilateris triangulis demonſtrauerimus, rem velut ante oculos expoſuerimus.

PROPOSITIO.

Datis duobustriangulis iſoſcelijs ſimilibus, & in altero eorum dato puncto extra rectam, quæ à vertice ad medium baſis cadit, duo puncta in reliquo triangulo prædicto puncto ſimiliter poſita inuenire.

Sint duo triangula iſoſcelia, & ſimilia ABC, DEF: quorum in altero ABC, à vertice A, ad baſim BC, bipartitam in puncto G, cadat recta AG: atque extra hanc

[Figure 28]

in triangulo ABC, ſit quoduis punctum H: & iuncta AH, fiat angulus EDK æqualis angulo BAH; & vt BA, ad

AH, ita fiat ED, ad DK: & quoniam angulus BAG, æqualis eſt angulo EDF: quorum angulus EDK, æqualis eſt angulo BAH, erit reliquus angulus KDF, æqualis reliquo angulo HAC; ſed angulus HAC, eſt maior angulo BAH; ergo & angulus KDF, maior erit angulo BAH; poſito igitur angulo FDL, æquali angulo BAH, ac proinde minori, quàm ſit angulus FDK, fiat vt BA, ad AH, ita FD, ad DL. Dico, in triangulo EDF, duo puncta K, L, ſimiliter poſita eſse ac punctum H, in triangulo BAC. Iungantur enim rectæ AH, BH, CH, EK, KF, FL, LE. Quoniam igitur angulus EDK, eſt æqualis angulo BAH, qui lateribus homologis continentur; erit angulus DEK, æqualis angulo ABH: ſed totus angulus DEF, æqualis eſt toti angulo ABC; reliquus igitur angulus KEF, æqualis erit reliquo HBC: ſed ex æquali eſt vt CB, ad BH, ita FE, ad EK; igitur vt antea erit angulus KFE, æqualis angulo HCB, & angulus DFK, æqualis angulo ACH, & angulus FDK, æqualis angulo CAH; punctum igitur K, ſimiliter poſitum erit in triangulo EDF, ac punctum H, in triangulo ABC. Rurſus quoniam angulus FDL, æqualis eſt angulo BAH, & latus AB, homologum lateri DF, (eſt enim vt BA, ad AC, ita FD, ad DE) ſed vt BA, ad AH, ita eſt FD, ad DL, per conſtructionem; ſimiliter vt ante, oſtenderemus, punctum L, in triangulo EDF, ſimiliter poſitum eſse puncto H; inuenta igitur ſunt duo puncta in triangulo DEF, ſimiliter poſita ac punctum H, in triangulo BAC. Quod propoſitum erat.

PROPOSITIO XX.

Omnis trapezij habentis duo latera parallela centrum grauitatis eſt in illa recta, quæ prædictorum bipartitorum laterum ſectiones iungit. atque in eo puncto, in quo tertia pars eius media ſic diuiditur, vt ſegmentum propinquius minori parallelarum ad reliquum eam proportionem habeat, quam maior parallelarum ad minorem. Talis autem rectæ lineæ ſic diuiſæ, ſegmentum minorem parallelarum attingens eſt ad reliquum, vt dupla maioris parallelarum vna cum minori, ad duplam minoris vna cum maiori.

Sit trapezium ABCD, cuius duæ AD, BC, ſint parallelæ: ſitque AD, maior. Sectiſque AD, BC, bifariam in punctis F, E, iunctaque EF, & ſecta in tres partes æquales in punctis K, H, fiat vt AD, ad BC, ita HG, ad GK. Dico G, eſse centrum grauitatis trapezij ABCD: & vt eſt dupla ipſius AD, vna cum BC, ad duplam ipſius BC, vna cum AD, ita eſse EG, ad

[Figure 29]

GF. Ducta enim per punctum H, ipſis AD, BC, pa-

rallela NO, abſcindantur EL, FM, ipſi GK æquales, &
iungantur ANE, EOD. Quoniam igitur NO ipſi AD,
parallela ſecat omnes ipſis AD, EC, interceptas in eaſ-
dem rationes, & eſt EH, pars tertia ipſius EF, erit & EN
ipſius EA, & EO, ipſius ED, pars tertia. Eſt autem NO,
parallela baſibus BE, EC, duorum triangulorum ABE,
ECD; in ipſa igitur NO, erunt centra grauitatis duo-
rum triangulorum ABE, ECD: ergo & compoſiti ex
vtroque in linea NO, erit centrum grauitatis. Quoniam
igitur K, centrum grauitatis trianguli AED, eſt in EF, &
totius trapezij ABCD, centrum grauitatis in eadem linea
EF; erit & reliquæ partis, duorum ſcilicet triangulorum
ABE, ECD, ſimul in linea EF, centrum grauitatis: ſed &
in linea NO; in puncto igitur H. Rurſus quoniam triangula
AED, ABE, ECD, ſunt inter eaſdem parallelas, erit
vt AD, ad BC, ita triangulum AED, ad duo triangu-
la ABE, ECD, ſimul: ſed vt AD, ad BC, ita eſt HG,
ad GK; vt igitur triangulum AED, ad duo triangula
ABE, ECD, ſimul, ita erit HG, ad GK. ſed K, eſt
centrum grauitatis trianguli AED: & H, duorum trian
gulorum ABE, ECD, ſimul; totius igitur trapezij AB
CD, centrum grauitatis erit G. Rurius quoniam EL,
eſt æqualis GK, æqualium EH, HK; erit reliqua LH,
æqualis reliquæ GH; tota igitur EG; erit bis GH, vna
cum GK: eadem ratione quoniam FM, eſt æqualis GK,
& MK, æqualis GH, erit FG, bis GK, vna cum GH:
vt igitur HG, bis vna cum GK, ad GK, bis vna cum
GH, ita erit EG, ad GF. Sed vt HG, bis vna cum
GK, ad GK bis vna cum GH, ita eſt AD, bis vna cum
BC, ad BC, bis vna cum AB, propterea quod eſt vt
AD, ad BC, ita HG, ad GK; vt igitur eſt AD, bis vna
cum BC, ad BC, bis vna cum AD, ita erit EG, ad GF.
Manifeſtum eſt igitur propoſitum.

Omnis polygoni æquilateri, & æquianguli
idem eſt centrum grauitatis, & figuræ.

Sit polygonum æquilaterum, & æquiangulum ABC DEFG, cuius ſit primo laterum numerus impar, centrum autem ſit L. Dico punctum L, eſse centrum grauitatis polygoni ABCDEFG; ſectis enim duobus lateribus DE, FG, bifariam in punctis K, H, ducantur ab angulis oppoſitis rectæ AH, CK. & rectæ BMG, CNF, CM, MF, iungantur. Quoniam igitur ex decima tertia quarti Elem. quemadmodum in pentagono, ita in omni prædicto polygono imparium multitudine laterum plane colligitur centrum polygoni eſse in qualibet recta, quæ ab angulo ad medium lateris oppoſiti ducitur, quoniam ab omnibus angulis ſic ductæ ſecant ſe ſe in eadem proportione æqualitatis, ita vt eadem ſit proportio ſegmentorum, quæ ad angulos, ad ea, quæ ad latera

[Figure 30]

illis angulis oppoſita; rectæ AH, CK, ſecabunt ſe ſe in puncto L. Rurſus quoniam ex eadem Euclidis angulus BAL, æqualis eſt angulo GAL, ſed AB, eſt æqualis AG, & AM, communis, erit baſis BM, æqualis baſi

MG, & angulus ABM, angulo AGM, ſed totus ABC, toti AGF, eſt æqualis; reliquus igitur angulus CBG, reliquo BGF, æqualis erit: ſed circa hos æquales angulos recta BM, oſtenſa eſt æqualis rectæ MG, & CB, eſt æqualis GF; baſis igitur CM, baſi GF, & angulus CMB, angulo FMG, æqualis erit; ſed totus BMN, æqualis eſt toti GMN; quia vterque rectus; reliquus igitur CMN, reliquo NMF, æqualis erit, quos circa recta CM, eſt æqualis MF, & MN, communis; baſis igitur CN, baſi NF, & anguli, qui ad N, æquales erunt, atque ideo recti: ſed & qui ad M, ſunt recti, & BM, eſt æqualis GM; parallelæ igitur ſunt BG, CF, & trapezij CBGF, centrum grauitatis eſt in linea MN: ſed & trianguli ABG, centrum grauitatis eſt in linea AM; totius igitur figuræ ABCFG, centrum grauitatis eſt in linea AN; hoc eſt in linea AH. Rurſus quoniam omnis quadrilateri quatuor anguli ſunt æquales quatuor rectis: & tres anguli ABM, BMN, MNC, ſunt æquales tribus angulis FGM, GMN, MNF, reliquus angulus BCF, reliquo CFG, æqualis erit: ſed totus angulus BCD, eſt æqualis toti angulo GFE; reliquus ergo DCF, reliquo CFE, æqualis erit: ſed linea CN, eſt æqualis NF, & anguli, qui ad N, ſunt recti; ſimiliter ergo vt antea, centrum grauitatis trapezij CDEF, erit in linea AH: ſed & totius figuræ ABCFG, eſt in linea AH; totius igitur polygoni ABCDEFG, in linea AH, eſt centrum grauitatis, quod idem ſimiliter in linea CK, eſse oftenderemus; in communi igitur ſectione puncto L, eſt centrum grauitatis polygoni ABCDEFG. Similiter quotcumque plurium laterum numero imparium eſset polygonum æquilaterum, & æquiangulum, ſemper deueniendo ab vno triangulo ad quotcumque eius trapezia; propoſitum concluderemus.

Sed eſto polygonum æquilaterum, & æquiangulum, ABCDEF, cuius laterum numerus ſit par, & centrum eſto G. Dico idem G, eſse centrum grauitatis polygoni ABCDEF. Iungantur enim angulorum oppoſitorum puncta rectis lineis AD, BE, CF. Ex quarto igitur Elem. ſecabunt ſeſe hæ rectæ omnes bifariam in vno puncto, quod talis figuræ centrum definiuimus: ſed G ponitur centrum; in puncto igitur G. Quoniam igitur duorum triangulorum CBG, GFE, anguli ad verticem BGC, FGE, ſunt æquales; & vterlibet angulorum CBG, GCB, æqualis eſt vtrilibet ipſorum EFG, GEF; ex quarto Elem. & circa æquales angulos latera proportionalia horum triangu lorum ſunt æqualia; ſimilia, & æqualia erunt triangula BC G, GFE: poſitis igitur centris grauitatis K, H, duorum triangulorum EFG, GBC, iunctiſque KG, GH, erit v- terlibet angulorum BGH, HGC, æqualis vtrilibet an-

[Figure 31]

gulorum CGK, KGE, propter ſimilitudinem poſitionis centrorum K, H, in iſoſcelijs triangulis CBG, GFE: (nam GH, ſi produceretur latus BC, bifariam ſecaret: ſimiliter GK, latus EF) ſed CG, eſt in directum poſita ipſi GF; igitur & GH ipſi GK: & ſunt æquales, vtpote lateribus triangulorum BCG, GFE, æqualibus homologæ; cum igitur eorundem triangulorum centra grauitatis ſint K, H; centrum grauitatis duorum triangulorum CBG, GFE, ſimul, erit punctum G. Eadem

ratione, tam duorum triangulorum ABG, DGE, quàm duorum AFG, CDG, ſimul, centrum grauitatis erit G; totius igitur polygoni ABCDEF; centrum grauitatis erit idem G. Manifeſtum eſt igitur propoſitum.

PROPOSITIO XXII.

Omnis figuræ circa diametrum in alteram par tem deficientis, in diametro eſt centrum grauitatis.

Sit figura ABC, circa diametrum BD, in alteram par tem deficiens verſus B. Dico centrum grauitatis figuræ ABC, eſse in linea BD. ſit enim punctum E, generaliter extra lineam BD. Et per puncta E, C, ducantur ipſi BD, parallelæ EF, CG, & vt eſt CD, ad DF, ita ponatur figura ABC, ad aliquod ſpacium M: & figuræ ABC, inſcribatur figura ex parallelogrammis æqualium altitudinum deficiens à figura ABC, minori defectu, quam ſit ſpacium M, quantumcumque illud ſit: minor igitur propor-

[Figure 32]

tio erit figuræ ABC, ad ſpacium M, hoc eſt minor proportio CD, ad DF, quàm figuræ ABC, ad ſui reliquum, dempta figura inſcripta. Quoniam autem diameter BD,

bifariam ſecat omnia latera parallelogrammorum inſcriptorum baſi AC, parallela; erit in diametro BD, eorum omnium parallelogrammorum centra grauitatis, atque ideo totius figuræ inſcriptæ centrum grauitatis, quod ſit H: & HEK, ducatur. Quoniam igitur EF, parallela eſt vtrique DH, CK; erit vt CD, ad DF, ita KH, ad HE, ſed minor eſt proportio CD, ad DF, quàm figuræ ABC, ad reſiduum, dempta figura inſcripta; ergo & KH, ad HE, minor erit proportio, quàm figuræ ABC, ad prædictum reſiduum: habeat LKH, eandem proportionem ad EH, quàm figura ABC, ad prædictum reſiduum. Quoniam igitur punctum K, cadit extra figuram

[Figure 33]

ABC; multo magis punctum L; non igitur punctum L, erit prædicti reſidui centrum grauitatis. Sed punctum H, eſt inſcriptæ figuræ centrum grauitatis: & vt figura inſcripta ad prædictum reſiduum, diuidendo, ita eſt LE, ad EH; non igitur E, eſt centrum grauitatis figuræ ABC: ſed ponitur E, generaliter punctum extra lineam BD; Nullum igitur punctum extra lineam BD, eſt centrum grauitatis figuræ ABC; in linea igitur BD, erit figuræ ABC, centrum grauitatis. Quod demonſtrandum erat.

COROLLARIVM.

Ex huius theorematis demonſtratione conſtat, omnis figuræ planæ, ſiue ſolidæ, cuius termini omnis cauitas ſit interior, atque ideo intra terminum centrum grauitatis; & cuius pars aliqua eſse poſsit, quæ à tota figura deficiens minori defectu quacumque magnitudine propoſita habeat centrum grauitatis in aliqua certa linea recta intra terminum figuræ conſtituta, eſſe in ea recta linea totius figuræ centrum grauitatis. Ac proinde, cum per vndecimam huius, omni ſolido circa axim in alteram partem deficienti, & baſim habenti circulum, vel ellypſim figura inſcribi poſſit ex cylindris, vel cylindri portionibus, à prædicto ſolido deficiens minori ſpacio quacumque magnitudine propoſita: talis autem figuræ inſcriptæ, quemadmodum & circumſcriptæ centrum grauitatis ſit in axe, vt ex ſequentibus patebit, & nunc cogitanti facilè patere poteſt; manifeſtum eſt omnis ſolidi circa axim in alteram partem deficientis centrum grauitatis eſſe in axe.

Circuli, & Ellypſis idem eſt centrum grauitatis, & figuræ.

Sit circulus, vel ellypſis ABCD, cuius centrum E. Dico centrum grauitatis figuræ ABCD, eſse punctum E. Ducantur enim duæ diametri ad rectos inter ſe angulos AC, BD; in ellypſi autem ſint diametri coniugatæ. Quoniam igitur omnes rectæ lineæ, quæ in ſemicirculo, vel dimidia ellypſi diametro ducantur parallelæ bifariam ſecantur à ſemidiametro, & quo à baſi remotiores, eo ſunt

[Figure 34]

minores; erit centrum grauitatis ſemicirculi, ſiue dimidiæ ellypſis ABC, in linea BE; ſicut & ſemicirculi, ſiue dimidiæ ellypſis ADC, centrum grauitatis in linea DE. eſt autem BED, vna recta linea: in diametro igitur BD, erit centrum grauitatis circuli, ſiue ellypſis ABCD. Eadem ratione oſtenderemus idem centrum grauitatis eſse in altera diametro AC: in communi igitur vtriuſque ſectione puncto E. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XXIV.

Si duarum pyramidum triangul as baſes habentium æqualium, & ſimilium inter ſe, tria latera tribus lateribus homologis fuerint in directum conſtituta, in vertice communi erit vtriuſque ſimul centrum grauitatis.

Sint duæ pyramides ſimiles, & æquales, quarum vertex communis G, baſes autem triangula ABC, DEF. Et ſint latera homologa pyramidum in directum inter ſe conſtituta: vt AG, GF: & BG, GD, & CG, GE. Dico compoſiti ex duabus pyramidibus ABCG, GDEF, ita conſtitut is centrum gra uitatis eſse in puncto G. Eſto enim H, centrum gra uitatis pyramidis ABCG, & ducta HGK, ponatur GK, æqualis GH, & iungantur EK, KD, BH, CH. Quoniam igitur eſt vt HG, ad GK, ita CG, ad GE, & proportio eſt æqualitatis: & angulus HGC, æqualis angulo EG K, erit triangulum CGH,

[Figure 35]

ſimile, & æquale triangulo EGK. Similiter triangulum BGH, trian gulo DGK; & triangulum BGC, triangulo DGE: quare & triangulum BCH, triangulo DEK. pyramis igitur BCGH, ſimilis, & æqualis eſt pyramidi EDGK. Congruentibus igitur inter ſe duobus triangu-

lis æqualibus, & ſimilibus BGC, DGE, & pyramis BCGH, pyramidi GDEK congruet, & puncto K, punctum H: & eadem ratione pyramis ABCG, pyramidi DEFG. congruente igitur pyramide ABCG, pyramidi DEFG, & punctum K, congruet puncto H. ſed H, eſt centrum gra uitatis pyramidis ABCG: igitur K, erit centrum gra uitatis pyramidis DEFG: ſed eſt GK, æqualis ipſi GH; vtriuſque igitur pyramidis ABCG, DEFG, ſimul centrum grauitatis erit K; Quod demonſtrandum erat.

[Figure 36]

PROPOSITIO XXV.

Omnis parallelepipedi centrum grauitatis eſt in medio axis.

Sit parallelepipedum ABCDEFGH, cuius axis LM, isque ſectus bifariam in puncto K. Dico K eſse centrum grauitatis parallelepipedi ABCDEFGH. iungantur enim diametri AG, BH, CE, DF, quæ omnes neceſsario tranſibunt per punctum K, & in eo puncto bifariam diuidentur. Iunctis igitur BD, FH: quoniam triangulum EFK, ſimile eſt, & æquale triangulo CDK, propter latera circa æquales angulos ad

verticem æqualia alterum alteri: eademque ratione, & triangulum EKH, triangulo BCK: & triangulum FKH, triangulo BDK; erit pyramis KEFH, ſimilis, & æqualis pyramidi KBCD: habent autem tria latera tribus lateribus homologis, ideſt æqualibus, in directum, prout inter ſe reſpondent, conſtituta; duarum igitur pyramidum KEFH, KBCD, ſimul centrum grauitatis erit K: non aliter duarum pyramidum KGFH, KBDA, ſimul centrum grauitatis erit K; totius igitur compoſiti ex quatuor pyramidibus; ideſt duabus oppoſitis ABCDK, EFGHK, centrum grauitatis erit idem K. Eadem ratione tam duarum pyrami-

[Figure 37]

dum AEHDK, BCGFK, ſimul, quàm duarum ABFEK, CDHGK, ſimul centrum grauitatis erit K. Totius igitur parallelepipedi ABCDEFGK, centrum grauitatis erit K. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XXVI.

Si parallelepipedum in duo parallelepipeda ſecetur, ſegmenta axis à centris grauitatis totius parallelepipedi, & partium terminata ex contrario parallelepipedi partibus reſpondent.

Si parallelepipedum AB, cuius axis CD, ſectum in duo parallelepipeda AE, EN, quare & axis CD, in axes CL, LD, parallelepipedorum AE, EN. Et ſint centra grauitatis; F, parallelepipedi EN, & G, parallelepipedi AE, & H, parallelepipedi AB, in medio cuiuſque axis ex antecedenti. Dico eſse FH, ad HG, vt parallelepipedum AE, ad EN, parallelepipedum. Iungantur enim diametri baſium oppoſitarum, quæ per puncta axium D, L, G, tranſibunt, ADM, KLE, NCB; iamque parallelogramma erunt AB, AE, EN, DB, DE, EC, propter eas, quæ parallelas iungunt, & æquales: quorum bina latera oppoſita ſecta erunt bifariam in punctis C, L, D, per definitionem axis: punctum igitur F, in medio rectæ CL, oppoſitorum laterum bipartitorum ſectiones coniungentis, erit parallelogrammi EN, centrum grauitatis. Eadem ratione & parallelogram-

[Figure 38]

mi AE, centrum grauitatis erit G, & H, parallelogram mi AB. Vt igitur parallelogrammum AE, ad parallelogrammum EN, hoc eſt, vt baſis ME, ad baſim EB; hoc eſt, vt parallelogrammum MO, ad parallelogrammum OB: hoc eſt, vt parallelepipedum AE, ad parallelepipedum EN: ita erit FH, ad HG. Quod demonſtrandum erat.

Solida grauia æquiponderant à longitudinibus ex contraria parte reſpondentibus.

Sint ſolida grauia A, & B, quorum centra grauitatis ſint A, B, ſecundum quæ ſuſpenſa intelligantur A, in puncto C, & B, in puncto D, cuiuslibet rectæ GH, quæ ſit ita diuiſa in puncto E, vt ſit DE, ad EC, vt eſt A, ad B. Dico ſolida A, E, æquiponderare à longitudinibus DE, EC; hoc eſt vtriuſque ſimul centrum grauitatis eſse E. Nam ſi A, B, ſint æqualia, manifeſtum eſt propoſitum: ſi autem inæqualia, eſto maius A: maior igitur erit DE, quam EC. abſcindatur DF, æqualis EC: erit igitur DE, æqualis GF: & CD, vtrin que producta, ponatur DH, æqualis DF: & CG, ipſi CF. & circa axim, & altitudinem GH, eſto parallelepipedum KL, æquale duobus ſo-

[Figure 39]

lidis A, B, ſimul & parallelepipedum KL, ſecetur plano per punctum F, oppoſitis planis parallelo, in duo parallelepipeda KN, ML. Quoniam igitur eſt vt GF, ad FH, ita parallelepipedum KN, ad parallelepipedum

ML, ſed vt GF, ad FH, ita eſt CF, ad FD, hoc eſt DE, ad EC, hoc eſt ſolidum A, ad ſolidum B; erit vt parallelepipedum KN, ad parallelepipedum ML, ita ſolidum A, ad ſolidum B. componendo igitur, & permutando, vt parallelepipedum KL, ad duo ſolida A, B, ſimul, ita parallelepipedum ML, ad ſolidum B: & reliquum ad reliquum: ſed parallelepipedum KL, æquale eſt duobus ſolidis A, B, ſimul: parallelepipedum igitur KN, ſolido A, & parallelepipedum ML, ſolido B, æquale erit. Rurſus, quoniam eſt vt GF, ad ad FH, ita CF, ad FD; hoc eſt DE, ad EC: ſed vt GF, ad FH, ita eſt parallelepipedum KN, ad parallelepipedum ML; erit vt DE, ad EC, ita paralle lepipedum KN, ad parallelepipedum ML; ſed C eſt parallelepipedi KN, & D, parallelepipe di ML, centrum grauitatis; totius igi

[Figure 40]

tur parallelepipedi KL, centrum grauitatis erit E. Igitur ſolido A, poſito ad punctum G, ſecundum centrum grauitatis A, & ſolidum B, ad punctum D, ſecundum centrum grauitatis B, quorum A, eſt æquale parallelepipedo KN, & B, parallelepipedo ML; ab ijſdem longitudinibus DE, EC, æquiponderabunt; eritque compoſiti ex vtroque ſolido A, B, centrum grauitatis E. Quod demonſtrandum erat.

Quod ſi quis à me quærat, cur non hic vtar quinta illa

generali primi Archimedis de planis æquiponderantibus, ſed illud idem propoſitum vna demonſtratione in planis, altera præſenti in ſolidis demonſtrauerim. Reſpondeo: quia Propoſitio quarta primi Archimedis, ex qua quinta neceſſario pendet, habet, ſi quis attendat, aliquas difficultates phyſicas, quæ mathematicis rationibus non facile diſſoluantur: quæ cauſa igitur illum adduxit ad ſimile quid demonſtrandum demonſtratione ad illas duas parabolas ap. plicata in ſecundo ſuo libro planorum æquiponderantium, quaſi qui quartæ, ac quintæ illi generali non ſatis acquieſceret; eadem me compulit ad hoc propoſitum duabus demonſtrationibus generalibus, altera de planis, altera de ſolidis grauibus ſecurius demonſtrandum.

PROPOSITIO XXVIII.

Quarumlibet trium magnitudinum eiuſdem generis centra grauitatis cum centro magnitudinis ex ijs compoſitæ ſunt in eodem plano.

Sint quælibet tres magnitudines eiuſdem generis A, B, C: quarum centra grauitatis A, B, C. Ex ijs autem compoſitæ ſit centrum grauitatis E. Dico quatuor puncta A, B, C, E, eſſe in eodem plano. Iungantur enim rectæ AB, BC, CA: & vt eſt A, ad C, ita ſit CD, ad DA, & BD, iungatur: punctum igitur D, erit cen-

[Figure 41]

trum grauitatis duarum magnitudinum A, C, ſimul. Rurſus quoniam recta BD, coniungit duo centra grauitatis duarum magnitudinum B ſcilicet, & AC, erit compoſitæ ACB, in recta BD, centrum graui tatis: eſt autem illud E. Quoniam igitur in quo plano eſt recta BD, in eodem ſunt duo puncta B, E, in quo autem plano eſt recta BD, in eodem eſt recta AC, & puncta A, C; in quo igitur plano ſunt puncta A, C, in eodem erunt puncta B, E; quatuor igitur puncta A, B, C, E, erunt in eodem plano; Quod demonſtr andum erat.

[Figure 42]

PROPOSITIO XXIX.

Si à cuiuslibet trianguli centro, & tribus angulis quatuor rectæ inter ſe parallelæ plano trian guli inſiſtant: tres autem magnitudines æquales habeant centra grauitatis in ijs tribus, quæ ad angulos; trium magnitudinum ſimul centrum grauitatis erit in ea, quæ ad trianguli centrum terminatur.

Sit triangulum ABC, cuius centrum N, à tribus autem angulis A, B, C, & centro N, inſiſtant plano trian-

guli ABC, quatuor rectæ inter ſe parallelæ AD, BE, CF, NM, tres autem magnitudines æquales habeant centra grauitatis G, H, K, in tribus AD, BE, CF. Dico trium magnitudinum ſimul, quarum centra grauitatis G, H, K, eſſe in linea NM. Iungantur enim rectæ GH, HK, GK, BNP; & per punctum P, recta PL, ipſi MN, parallela, & iungatur LH. Quoniam igitur rectæ BP, LH, iungunt duas parallelas LP, BH; erunt quatuor rectæ BH, LP, BP, LH, in eodem plano. Et quoniam planum quadranguli PH, ſecat planum trianguli ABC, à communi autem ſectione BP, ſurgunt duæ parallelæ PL, MN; quarum PL, eſt in plano quadranguli PH, erit etiam MN, in eodem plano quadranguli PH: & ſecabit LH. ſecet in puncto O: qùare vt LO, ad OH, ita erit PN, ad NB, propter parallelas: ſed PN, eſt dimidia ipſius NB; ergo & LO, eſt dimidia ipſius OH. Eadem ratione, quoniam AP, æqua-

[Figure 43]

lis eſt PC, erit & GL, æqualis LK. Duarum igitur magnitudinum G, K, ſimul centrum grauitatis erit L: ſed reliquæ magnitudinis, quæ ad H, eſt centrum grauitatis H; & vt compoſitum ex duabus magnitudinibus G, K, ad magnitudinem H, ita ex contraria parte eſt HO, ad OL; Trium igitur magnitudinum G, H, K, ſimul centrum grauitatis erit O, & in linea MN. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XXX.

Omnis octaedri idem eſt centrum grauitatis, & figuræ.

Eſto octaedrum ABCDEF, cuius centrum G. Dico G, eſse centrum grauitatis octaedri ABCDEF. Ductis enim axibus AC, BD, EF, communis eorum ſectio erit centrum G, in quo axes bifariam ſecabuntur: omnium autem angulorum, qui ad G, bini qui que ad verticem ſunt æquales, qui æqualibus altera alteri rectis continentur; ſimilia igitur, & æqualia erunt triangula, nimirum EBG, GDF, & ECG, ipſi GFA, & BCG, ipſi GDA: igitur & BCE, ipſi ADF; pyramis igitur EBCG, ſimilis, & æqualis eſt pyramidi ADFG, quarum latera homologa ſunt indirectum inter ſe conſtituta; duarum igitur pyramidum

[Figure 44]

EBCG, ADFG, ſimul centrum grauitatis erit G. Eadem ratione ſex reliquarum pyramidum binis quibuſque oppoſitis ſimul ſumptis centrum grauitatis erit G. Totius igitur octaedri ABCDEF, centrum grauitatis erit G. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XXXI.

Omnis pyramidis triangulam baſim habentis
idem eſt centrum grauitatis, & figuræ.

Sit pyramis ABCD, cuius baſis triangulum ABC, centrum autem E. Dico E, eſſe centrum grauitatis pyramidis ABCD. Secta enim ABCD, pyramide in quatuor pyramides, ſimiles, & æquales inter ſe, & toti pyramidi ABCD, & vnum octaedrum, ſint eæ pyramides DKLM, MGCH, LBGF, AKFH. Octaedrum autem FGHKLM, quod dimidium erit pyramidis ABCD, & ſint axes pyramidum DSN, DS, KO, LP, MQ: & ARG, iunga tur. Quoniam igitur FH, eſt parallela ipſi BC, & ſecta eſt BC, bifariam in puncto G, tranſibit recta AG, per centra triangulorum O, & N, ad quæ axes KO,

[Figure 45]

DN, terminantur; manifeſtum hoc eſt ex ſuperioribus: eritque dupla AO, ipſius OR, nec non AN, dupla ipſius NG, componendo igitur erit vt AG, ad GN, ita AR, ad RO, & permutando, vt AG, ad AR, ita GN, ad RO: ſed AG, eſt dupla ipſius AR, quoniam & AB, ipſius AF; igitur & GN, erit dupla ipſius RO: ſed & GN, eſt dupla ipſius NR, nam N, eſt centrum trianguli GFH; æqualis eſt igitur NR, ipſi RO, atque hinc dupla NO,

ipſius OR; ſed & AO erat dupla ipſius OR; æqualis igitur AO erit ipſi ON. quare vt AK, ad KD, ita erit AO, ad ON: igitur in triangulo ADN, erit KO, ipſi DN, parallela. Eadem ratione ſi iungerentur rectæ BH, CF oſtenderemus & duos reliquos axes LP, MQ, eſſe axi DN parallelos: quatuor autem prædicti axes inſiſtunt plano trianguli KLM, ita vt DN tranſeat per centrum S: reliqui autem KO, LP, MQ, terminentur ad angulorum vertices K, L, M, trianguli KLM; igitur ſi tres æquales magnitudines habeant centra grauitatis in axibus KO, LP, Mque compoſiti ex ijs tribus magnitudinibus in axe DN erit centrum grauitatis. Rurſus quoniam E ponitur cem trum pyramidis ABCD, erit idem E centrum octaedri FGHKLM, idque in axe DN: eſt autem idem centrum gra uitatis octaedri, & figu ræ: centrum igitur E octaedri FCHKLM erit in axe DN. Quod

[Figure 46]

ſi quatuor reliquæ pyramides dempto prædicto octaedro ſimiliter diuidantur, ac pyramis ABCD diuiſa fuit, erunt rurſus in ſingulis quatuor prædictarum pyramidum ſingula octaedra centrum grauitatis habentia vnumquodque in axe ſuæ pyramidis: quæ pyramides cum ſint inter ſe æquales, earum dimidia octaedr a ipſis inſcripta inter ſe erunt æqualia: ſunt autem eorum centra grauitatis in axibus abſciſsarum pyramidum, DS, KO, LP, MQ axis autem DS: eſt in axe DN; per ea igitur, quæ de-

monſtrauimus trium octaedrorum, quæ ſunt in pyramidibus AFHK, FBGL, GHOM ſimul, centrum grauitatis erit in axe DK: ſed & octaedri in pyramide DKLM, & octaedri FGHKLM centra grauitatis ſunt in axe DN; omnium igitur quinque octaedrorum, quæ ſunt in tota pyramide ABCD ſimul centrum grauitatis eſt in axe DN. Quod ſi rurſus in ſingulis quatuor prædictarum pyramidum modo dicta ratione quina octaedra deſcripta intelligantur, ſimiliter oſtenſum erit quina octaedra in ſingulis quatuor abſciſſarum pyramidum, velut quatuor magnitudines, centra grauitatis habere in axibus quatuor prædictarum pyramidum: ſunt autem hæc quatuor compoſita ex quinis octaedris inter ſe æqualia, propter æqualitatem octaedrorum multitudine æqualium, quæ æqualibus ſunt pyramidibus ipſorum duplis ord ine diuiſionis inter ſe reſpondentibus inſcripta; igitur vt ante, quater quinorum octaedrorum ſimul in axe DN erit centrum grauitatis: ſed & octaedri FGHKLM centrum grauitatis eſt in axe DN; vnius igitur & viginti octaedrorum in pyramide ABCD exiſtentium ex hac ſecunda diuiſione, tanquàm vnius magnitudinis in axe DN erit centrum grauitatis. Ab hoc igitur numero vnius & viginti octaedrorum in pyramide ABCD exiſtentium, ſimili diuiſione illius reliquarum quatuor pyramidum primo abſciſſarum procedentes, & eundem ſemper gyrum, quem fecimus à quinario repetentes, poterunt eſse in tota ABCD pyramide tot, quemadmodum diximus, deſcripta, octaedra, vt eorum numerus ſuperet quemcumque propoſitum numerum, & omnium tanquàm vnius magnitudinis in axe DN, ſit centrum grauitatis. Sic autem facienti, & reliquarum pyramidum demptis præcedentibus octaedris, dimidia octaedra ſemper auferenti, tandem relinquentur pyramides minores ſimul ſumptæ quantacumque magnitudine propoſita. Totius igitur pyramidis ABCD

in axe DN, erit centrum grauitatis. Eadem ratione in quolibet reliquorum trium axium, pyramidis ABCD, ipſius centrum grauitatis eſse oſtenderemus; communis igitur ſectio quatuor axium pyramidis ABCD, quod eſt ipſius centrum E, erit centrum grauitatis pyramidis AB CD. Quod demonſtrandum erat.

COROLLARIVM.

Hinc manifeſtum eſt centrum grauitatis pyramidis triangulam baſim habentis eſſe in eopuncto, in quo axis ſic diuiditur, vt pars quæ ad vericem ſit reliquæ tripla.

PROPOSITIO XXXII.

Ominis pyramidis baſim pluſquam trilateram habentis centrum grauitatis axim ita diuidit, vt pars, quæ eſt ad verticem ſit tripla reliquæ.

Sit pyramis ABCDE, cui vertex E, baſis autem quadrilatera ABCD, & eſto axis EF, ſegmentum EM, reliqui MF, triplum. Dico punctum M, eſſe centrum grauitatis pyramidis ABCDE. Ducta enim AC, ſit trianguli ABC, centrum grauitatis H, ſicut & K, trianguli ACD: & iungantur KH, HE, EK: Factaque vt EM, ad MF, ita EL ad LH, & EN ad NK, iungatur LN. Quoniam igitur EF eſt axis pyramidis ABCDE, erit baſis ABCD centrum grauitatis F.

Rurſus quia puncta K, H, ſunt centra grauitatis triangulorum ABC, CDA, erunt EH, EK, axes pyramidum ABCE, ACDA: quorum EL, eſt tripla ipſius LH, nec non EN, tripla ipſius EK; pyramidis igitur ABCE, centrum grauitatis erit L, ſicut & K, pyramidis ACDE. Rurſus, quoniam totius quadrilateri ABCD, eſt centrum grauitatis F, cuius magnitudinis partium triangulorum ABC, CDA, centra grauitatis ſunt K, H; recta KH, à puncto F, ſic diuiditur, vt ſit HF, ad FK, vt triangulum ACD, ad triangulum ABC, hoc eſt, vt pyramis ACDE, ad pyramidem ABCE. ſed vt HF, ad FK, ita eſt LM, ad MN; vt igitur eſt pyramis ACDE, ad pyramidem ABCE, ita erit LM, ad MN. Sed N, eſt centrum grauitatis py-

[Figure 47]

ramidis ACDE, & L pyramidis ABCE; punctum igitur M, erit centrum grauitatis pyramidis ABCDE. Quod ſi pyramis habeat baſim quinquelateram; poſito rurſus axe totius pyramidis, & baſi ſecta in triangulum, & quadrilaterum, poſitis vtriuſque proprijs centris grauitatis, eadem demonſtratione propoſitum concludetur. Quemadmodum ſi baſis ſit ſex laterum, ſecta ea in quinque laterum, & triangulum, & reliquis vt antea poſitis: & ſic ſem per deinceps. Manifeſtum eſt igitur propoſitum.

Omnis priſmatis triangulam baſim habentis centrum grauitatis eſt in medio axis.

Sit priſma ABCDEF, cuius baſes oppoſitæ triangula ABC, DEF, axis autem GH, ſectus ſit bifariam in puncto K. Dico punctum K, eſse priſinatis ABCD EF, centrum grauitatis. Ducantur enim rectæ FGO, CHP, PO. Quoniam igitur GH, eſt axis priſmatis ABCDEF, erit punctum G, centrum grauitatis trianguli DEF: ſicut & H, trianguli ABC; vtraque igitur dupla eſt AG, ipſius GO, & CH, ipſius PH, ſectæque erunt AB, DE, bifariam in punctis P, O: parallela igitur, & æqualis eſt OP, ipſi DA, iamque ipſi FC. quæ igitur illas coniungunt CP, FO, æquales ſunt, & parallelæ, & parallelogrammum FP. Nunc ſecta OP, bifariam in puncto N, iungantur GN, NF, AF, FH, FB, & facta FL, tripla ipſius LH,

[Figure 48]

à puncto L, per punctum K, ducatur recta LKMR. Quoniam igitur eſt vt FG, ad GO, ita CH, ad HP, & parallelogrammum eſt FCPO; parallelogramma etiam erunt CG, GP, angulus igitur FGH, æqualis erit angulo NGO, quos circa æquales angulos latera

FG, GH, homologa ſunt lateribus GO, ON. nam
dupla eſt FG, ipſius GO, & GH, ipſius ON; angulus
igitur OGN, æqualis erit angulo GFH; parallela igi-
tur GN, ipſi FH, & propterſimilitudinem triangulorum
dupla erit FH, ipſius GN. Rurſus, quoniam recta
OP, ſecat latera oppoſita parallelogrammi BD, bifa-
riam in punctis O, P, ſecta, & ipſa bifariam in puncto N,
erit punctum N, parallelogrammi BD, centrum grai-
tatis, atque ideo axis FN, pyramidis ABDEF. qua
ratione erit quoque axis FH, pyramidis ABCF: ſed
FL, eſt tripla ipſius LH; pyramidis igitur ABCF, cen-
trum grauitatis erit L. Rurſus quia eſt vt GK, ad KH,
ita GR, ad LH, propter ſimilitudinem triangulorum,
erit æqualis GR, ipſi LH: ſed eſt FH, quadrupla ip-,
ſius LH, quadrupla igitur FH, ipſius GR: ſed FH
erat dupla ipſius GN; quadrupla igitur FH, reliquæ
NR, ac proinde GR, RN, æquales erunt: recta igitur
FL, tripla erit vtriuſque ipſarum GR, RN, ſed vt FL,
ad NR, ita eſt FM, ad MN, propter ſimilitudinem trian
gulorum; recta igitur FM, erit ipſius MN, tripla, ſicut
& LM, ipſius MR: ſed quia KH, eſt æqualis GK,
erit & LK, æqualis RK; propter ſimilitudinem trian-
gulorum; cum igitur LK, ſit tripla ipſius MR, erit LK,
ipſius KM, dupla; vt igitur eſt pyramis ABEDF, ad
pyramidem ABCF, ita erit LK, ad KM; eſt autem M,
centrum grauitatis pyramidis ABED, ſicut & L, pyrami-
dis ABCF; totius igitur priſmatis ABCDEF, centrum
grauitatis erit K. Quod demonſtrandum erat.

Omnis priſmatis baſim pluſquam trilateram habentis centrum grauitatis eſt in medio axis.

Sit priſma ABCDEFGH, baſim habens quadrilateram ABCD: axis autem KL, bifariam ſectus in puncto M. Dico punctum M, eſse centrum grauitatis priſmatis ABCDEFGH. Iungantur enim rectæ BD, FH, vt parallelogrammum ſit BH, ſectumque totum priſma in duo priſmata, quorum baſes ſunt triangula, in quæ ſecta ſunt quadrilatera AC, EG, ſint autem axes duorum priſmatum triangulas baſes habentium NO, Pque Erunt igitur centra grauitatis O, trianguli ABD, & L, quadrilateri AC, & Q, trianguli BCD, itemque N, trianguli EFH, & K, quadrilateri EG, & P, trianguli FGH: iunctæ igitur OQ, NP, per pun

[Figure 49]

cta L, K, tranſibunt: cumque tres prædicti axes ſint lateribus priſmatis, atque ideo inter ſe quoque paralleli; parallelogramma erunt OP, NL, LP. ducta igitur per punctum M, ipſi OQ, vel NP, parallela RS, erit vt NK, ad KP, ita RM, ad MS: & vt KM, ad ML, ita NR, ad RO, & PS, ad SQ: ſed KM, eſt æqualis ML; igitur & KR, ipſi RO, & PS, ipſi SQ, æqualis erit: ſunt autem hæ ſegmenta axium NO, Pque punctum igitur R, eſt centrum grauitatis priſmatis ABDEFH: & per

punctum S, priſmatis BCDFGH. Quoniam igitur quadrilateri EG, eſt centrum grauitatis K, cuius duorum triangulorum centra grauitatis ſunt P, N; erit vt triangulum FGH, ad triangulum EFH, hoc eſt vt priſma BCDFGH, ad priſma ABDEFH, ita NK, ad KP, hoc eſt RM, ad MS; cum igitur ſit R, centrum grauitatis priſmatis ABDEFH: ſicut & S, priſmatis BCDFGH; totius priſmatis ABCDEFGH, centrum grauitatis erit M. Quod ſi priſma baſim habeat quinquelateram; abſciſso rurſus priſmate vno triangulam baſim habente, ſumptiſque axibus priſinatum, quorum alterum habebit baſim quadrilateram, eadem demonſtratione propoſitum concluderemus, & ſic deinceps in aliis. Manifeſtum eſt igitur propoſitum.

PROPOSITIO XXXV.

Omnis fruſti pyramidis triangulam baſim ha bentis centrum grauitatis eſt in axe, primum ita diuiſo, vt ſegmentum attingens minorem baſim ſit ad reliquum, vt duplum vnius laterum maioris baſis vna cum latere homologo minoris, ad duplum prædicti lateris minoris baſis, vna cum latere homologo maioris. Deinde à puncto ſectionis abſciſsa quarta parte ſegmenti, quod maiorem baſim attingit, & à puncto, in quo ad minorem baſim axis terminatur ſumpta item quarta parte totius axis; in eo puncto, in quo ſegmentum axis duabus poſterioribus ſectionibus finitum ſic diuiditur, vt

ſegmentum eius maiori baſi propinquius ſit ad totum prædictum interiectum ſegmentum, vt tertia proportionalis minor ad duo latera homologa baſium oppoſitarum, ad compoſitam ex his tribus deinceps proportionalibus.

Sit pyramidis fruſtum, cuius baſes oppoſitæ, & parallelæ, maior triangulum ABC, minor autem triangulum DEF, axis autem GH. triangulorum autem ABC, DEF, quæ inter ſe ſimilia eſse neceſse eſt, ſint duo latera homologa BC, EF: & vt eſt BC, ad EF, ita ſit EF, ad X: vt autem eſt duplum lateris BC, vna cum latere EF, ad duplum lateris EF, vna cum latere BC, ita ſit HN, ad NG, & NO, pars quarta ipſius NG, & HS, pars quarta ipſius GH; ipſius autem SO, ſit VO, ad OS, vt eſt X, ad compoſitam ex tribus BC, EF, X. Dico punctum V (quod cadet neceſsario infra

[Figure 50]

punctum N, quanquam hoc ad demonſtrationem nihil refert) eſse centrum grauitatis fruſti ABCDEF. Ducta enim recta AGL; quoniam GH, eſt axis fruſti ABCD EF, & punctum G, centrum grauitatis trianguli ABC, erit punctum L, in medio baſis BC: ſecto igitur etiam latere EF, bifariam in puncto K, iungantur LK, KH: & vt

vt eſt HN, ad NG, ita fiat KM, ad ML, & GM, iungatur: & vt eſt GO, ad ON, ita fiat GP, ad PM, & iungantur MN, OP, FG, GD, GE. Quoniam igitur recta KL, ſecat trapezij BCFE, latera parallela bifariam in punctis K,L, & eſt vt HN, ad NG, hoc eſt vt duplum lateris BC, vna cum latere EF, ad duplum lateris EF, vna cum latere BC, ita KM, ad ML; erit punctum M, centrum grauitatis trapezij BCFE, & pyramidis GBCFE, axis GM. Et quoniam vt GO, ad ON, ita eſt GP, ad PM, atque ideo GP, tripla ipſius PM, erit punctum P, centrum grauitatis pyramidis GBCFE, atque ideo in linea OP. Rurſus quoniam angulus ACB; æqualis eſt angulo DFK: & vt AC, ad CK, ita eſt DF, ad FK: eſt autem DF, parallela ipſi AC, & FK, ipſi CL; erit reliqua DK, reliquæ AL, parallela; vnum igitur planum eſt, ADKL, in quo iacet triangulum GMN; cum igitur ſit parallela KH, ipſi GL, vtque HN, ad NG, ita KM, ad ML; erit MN, ipſi LG, parallela: ſed OP, eſt parallela ipſi MN; ſecant enim latera trianguli GMN, in eaſdem rationes; igitur OP, erit LG, parallela. Similiter ex puncto O, ad axes duarum pyramidum GABED, GACFD, duæ aliæ rectæ lineæ ducerentur, quas & centra grauitatis pyramidum habere, & parallelas rectis GQ, GR, alteram alteri eſse oſtenderemus, ſicut oſtendimus OP, habentem centrum grauitatis pyramidis GBCFE, ipſi GL, parallelam; ſed tres rectæ GL, GQ, GR, ſunt in eodem plano trianguli nimirum ABC; tres igitur prædictæ parallelæ, quæ ex puncto O, atque ideo trium prædictarum pyramidum centra grauitatis erunt in eodem plano, per punctum O, & trianguli ABC, parallelo. Quoniam igitur fruſti ABCDE, centrum grauitatis eſt in axe GH; (manifeſtum hoc autem ex duobus centris grauitatis pyramidis, cuius eſt prædictum fruſtum, & ablatæ, quæ centra grauitatis ſunt in axe, cuius ſegmentum eſt axis

GH) erit eiuſdem fruſti ABCDEF, centrum grauitatis O. Rurſus quoniam vt tres deinceps proportionales BC, EF, X, ſimul ad BC, ita eſt fruſtum ABCDEF, ad pyramidem; ſi deſcribatur ABCH: ſed vt triangulum ABC, ad ſimile triangulum EDF, hoc eſt vt BC, ad X, ita eſt pyramis ABCH, ad pyramidem GDEF; erit ex æquali, vt tres lineæ BC, EF, X, ſimul ad X, ita fruſtum ABCDEF, ad pyramidem GDEF: & conuertendo, vt X, ad compoſitam ex BC, EF, X, hoc eſt vt VO, ad OS, ita pyramis GDEF, ad fruſtum ABCDEF; & diuidendo, vt pyra-

[Figure 51]

mis GDEF, ad reliquas tres pyramides fruſti, ita OV, ad VS; ſed S, eſt centrum grauitatis pyramidis GDEF, & O, trium reliquarum; fruſti igitur ABCDEF, centrum grauitatis erit V. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XXXVI.

Omnis fruſti pyramidis baſim pluſquam trilateram habentis centrum grauitatis eſt punctum illud, in quo axis ſic diuiditur, vt axis fruſti pyramidis triangulam baſim habentis diuiditur ab ipſius centro grauitatis.

Sit pyramidis quadrilateram baſim habentis fruſtum ABCDEFGH, cuius axis KL, atque in ipſo centrum grauitatis O. Dico axim KL, ſectum eſse in puncto O, vt propoſuimus. Ductis enim AC, EG, quæ ſimilium ſectionum angulos æquales ſubtendant B, F, qui lateribus homologis continentur, fruſta erunt pyramidum triangulas baſes habentium AFG, AGH: ſit autem fruſti AFG, axis TP, & in eo eiuſdem fruſti centrum grauitatis M, & fruſti AGH, axis VQ, & in eo centrum grauitatis N, & iungantur TV, MN, Pque Quoniam igitur eſt pyramidis fruſtum, quod proponitur; omnia

[Figure 52]

cius producta latera concurrent in vno puncto, qui eſt pyramidis vertex: fruſta igitur, in quæ diuiſum eſt fruſtum propoſitum earum ſunt pyramidum, quæ verticem habent communem cum pyramide, cuius eſt fruſtum propoſitum: tres igitur talium fruſtorum axes, vt pote ſegmenta axium trium prædictarum pyramidum in communi illo vertice concurrent: quilibet igitur duo trium prædictorum axium KL, TP, VQ, erunt in eodem plano: TP, igitur, & VQ, ſunt in eodem plano. Eadem autem ratione, qua vtebamur de priſmate K, centrum grauitatis K, baſis EH, eſt in linea TV, & L, baſis BD, centrum grauitatis eſt in linea Pque reliquæ igitur KL, MN, erunt in eodem plano trapezij PTVQ, ſeque mutuo ſecabunt: cum

igitur M, N, ſint centra grauitatis propoſiti priſmatis par tium priſmatum AFG, AGH, atque obid O, totius priſmatis AFGH, in linea MN, centrum grauitatis; per pun ctum O, recta MN, tranſibit. Et quoniam planum trapezij PV, ſecatur duobus planis parallelis, erunt TV, PQ, fectiones parallelæ. His demonſtratis, fiat rurſus vt AB, bis vna cum EF, ad EF, bis vna cum AB, ita TY, ad YP: & ſumatur Tω, pars quarta ipſius TP, & YZ, pars quarta ipſius PY, & ad axim KL, ducantur ipſis TV, PQ, parallelæ ωS, YR, ZX, quæ rectas TP, KL, ſecabunt in eaſdem rationes: vt igitur TY, ad ϒP, hoc eſt vt AB, bis vna cum EF, ad EF bis vna cum AB, ita erit KR, ad RL, eritque KS, pars quarta ipſius K L, qualis & R

[Figure 53]

X, ipſius RL. Et quoniam M, eſt centrum grauitatis fruſti AFG; manifeſtum eſt ex tribus prædictis axis TP, ſectionibus ϒ, ω, Z, eſse MZ, ad Zω, hoc eſt OX, ad XS, vt eſt 6 ad compoſitam ex tribus deinceps proportionalibus AB, EF, 6; Fruſti igitur ABCDEFGH, centrum gra uitatis O, axim KL, ita diuidit, vt propoſuimus. Quod ſi fruſtum propoſitum ſit pyramidis baſim habentis quinquelateram, & quotcumque plurium deinceps fuerit laterum, eadem demonſtratione ſemper deinceps, vt in priſmate monuimus, propoſitum concluderemus.

PROPOSITIO XXXVII.

Dodecaedri, & icoſaedri idem eſt centrum gra
uitatis, & figuræ.

Nam huiuſmodi figuras habere axes, qui omnes ſe ſe bifariam ſecant; (tale autem ſectionis punctum centrum eſt) conſtat ex talium corporum in ſphæra inſcriptione in decimotertio Euclidis Elemento: nec non omnem pyramidem, cuius vertex eſt dodecaedri, vel octaedri centrum idem cum centro ſphæræ, vt conſtat ex ijſdem Euclidis inſcriptionibus; baſis autem triangulum æquilaterum, vel pentagonum, vna ex baſibus corporum prædictorum, habere pyramidem oppoſitam ſimilem ipſi, & æqualem, cuius latera eius lateribus homologis ſunt in directum poſita, baſis autem triangulum, vel pentagonum, quale diximus; Eadem igitur ratione, qua vſi ſumus ad demonſtrandum centrum grauitatis, & parallelepipedi, & octaedri, propoſitum concluderemus.

PROPOSITIO XXXVIII.

Data qualibet figura, cuius termini omnis
cauitas ſit interior, ſi certum in ea punctum talis
cius partis centrum grauitatis eſse poſsit, quæ ab
ca deficiat minori ſpacio quantacumque magnitu
dine propoſita; illud erit totius figuræ centrum
grauitatis.

Eſto figura AB, cuius termini omnis cauitas ſit interior & certum in ea punctum E, talis partis AB, figuræ qualem diximus centrum grauitatis eſse poſsit. Dico punctum E, eſse figuræ AB, centrum grauitatis. Si enim E, non eſt, erit aliud, eſto F: & iuncta EF producatur, & ſumatur in illa extra figuræ AB, terminum, quodlibet punctum G; & vt eſt FE, ad EG, ita ſit alia magnitudo K, ad figuram AB, & ex vi hypotheſis ſit pars quædam CD, figuræ AB, cuius centrum gra uitatis E, talis vt ablata relinquat AC, minus magnitudine K. Minor igitur proportio erit AC, ad AB, quàm K, ad AB, hoc eſt quàm FE, ad EG; fiat vt AC, ad AB, ita EF, ad FGH: ſed F, eſt cen trum grauitatis totius AB, & E, vnius partis CD; reliquæ igitur

[Figure 54]

partis AC, centrum grauitatis erit H, vltra punctum G: ſed G, cadit extra terminum figuræ AC; multo igitur magis H: Quod eſt abſurdum. Non igitur aliud punctum à puncto E; punctum igitur E, figuræ AB, erit centrum grauitatis Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XXXIX.

Omnis coni centrum grauitatis axim ita diuidit, vt ſegmentum ad verticem ſit reliqui triplum.

Sit conus ABC, cuius vertex B, axis autem BD, cuius BE, ſit tripla ipſius ED. Dico punctum E, eſse coni ABC, centrum grauitatis. Si enim cono ABC, pyramis inſcribatur, cuius baſis inſcripta circulo AC, æquilatera ſit, & æquiangula, eius centrum grauitatis erit idem quod & figuræ centrum, ſed centrum talis figuræ circulo inſcriptæ idem eſt, quod centrum circuli, vt colligitur ex demonſtrationibus quarti Elementorum; inſcriptæ igitur pyramidis erit axis BD, & centrum grauitatis E. talis autem ea pyramis inſcribi poteſt, vt à cono deficiat minori ſpacio quantacumque magnitudine propoſita; igitur ABC, coni centrum grauitatis erit E. Quod demonſtrandum erat.

[Figure 55]

PROPOSITIO XXXX.

Omnis fruſti conici centrum grauitatis idem eſt in axe centro grauitatis fruſti pyramidis baſim habentis æquilateram, & æquiangul am in ſcriptæ cono, ab ſciſſi eodem plano, quo coni fruſtum.

Sit coni fruſtum ABCD, cuius axis EF, fruſto autem ABCD, intelligatur inſcriptum fruſtum pyramidis inſcriptæ cono AHD, à quo abſciſsum eſt fruſtum ABCD, baſim habentis æquilateram, & æquiangulam inſcriptam circulo AD: quare eius centrum grauitatis, & figuræ erit punctum F, vt diximus in præcedenti, axis autem FH, ſicut etiam pyramidis abſciſsæ vna cum cono BHC, axis EH, quare & reliqui fruſti pyramidis axis erit EF, igitur in EF, ſit fruſti inſcripti fruſto ABCD, centrum grauitatis G. Dico punctum G, eſse centrum grauitatis fruſti ABCD. Ponatur enim FL, pars quarta ipſius FH, necnon EK, pars quarta ipſius EH: punctum igitur K, eſt centrum grauitatis pyramidis, & coni BHC, ſicut & punctum L, pyramidis, & coni AHD. cum igitur fruſti pyramidis fruſto ABCD, inſcripti ſit centrum grauitatis G; erit vt GL, ad LK, ita pyramis BHC, ad pyramidis fruſtum fruſto ABCD, inſcriptum: ſed vt pyramis BHC, ad pyramidis fruſtum fruſto ABCD, inſcriptum,

[Figure 56]

ita eſt diuidendo, conus BHC, ad fruſtum ABCD, propter eandem triplicatam communium conis, & pyramidibus ſimilibus laterum homologorum proportionem; vt igitur GL, ad LK, ita erit conus BHC: ad fruſtum ABCD: ſed coni BHC, centrum grauitatis erat K, & coni AHD, centrum grauitatis L; fruſti igitur ABCD, centrum granitatis erit G. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XLI.

Omnis cylindri centrum grauitatis axim bifariam diuidit.

Sit cylindrus ABCD, cuius axis EF, & ſit ſectus bifariam in puncto G. Dico punctum G, eſse centrum grauitatis cylindri ABCD. Nam ſi cylindro AD, inſcriptum intelligatur priſma, cuius baſes oppoſitæ æquilateræ ſint, & æquiangulæ; erunt, qua ratione ſupra diximus, earum centra figuræ, & grauitatis E, F; axis igitur inſcripti priſmatis erit EF: & centrum gra uitatis G. poteſt autem tale priſma ſic inſcribi cylindro ABCD, vt ab illo deficiat minori ſpacio quantacumque magnitudine propoſita; cylindri igitur ABCD, centrum grauitatis erit G. Quod demonſtrandum erat.

[Figure 57]

PROPOSITIO XLII.

Sphæræ, & ſphæroidis idem eſt centrum grauitatis, & figuræ.

Sit ſphæra, vel ſphæroides ABCD, cuius centrum E,

Dico ſphæræ, vel ſphæroidis ABCD, centrum grauitatis eſse E. Sint enim bini axes ſphæræ, vel ſphæroidis inter ſe ad rectos angulos; & in ſphæroide ſit maior diameter BD, minor AC, per binos autem hos axes plana tranſeuntia ad eos axes erecta, ſecent ſphæram, vel ſphæroidem. Qua ratione axes dimidij erunt axes hemiſphærij, vel hemiſphæroidis: hemiſphærium autem, & ſphæroidis eſt figura circa axim in alteram partem deficiens, qualium omnium figurarum centrum grauitatis eſt in axe; igitur hemiſphærij, vel hemiſphæroidis ABCD, centrum grauitatis eſt in axi BE, ſicut & reliqui ADA, in axi ED; totius igitur ſphæræ, vel ſphæroidis ABCD centrum grauitatis eſt in axi BD. Eadem ratione & in axi AC; in communi igitur ſectione centro E. Quod demonſtrandum erat.

[Figure 58]

PRIMI LIBRI FINIS.

[Figure 59]

LVCAE VALERII DE CENTRO GRAVITATIS SOLIDORVM LIBER SECVNDVS.

PROPOSITIO I.

Si duæ magnitudines vnà maio
res, vel minores prima, & ter
tia minori exceſſu, vel defe-
ctu quantacumque magnitudi
ne propoſita eiuſdem generis
cum illa, ad quam refertur,
eandem proportionem habue-
rint, maior vel minor prima ad ſecundam, & vnà
maior, vel minor tertia ad quartam; erit vt prima
ad ſecundam, ita tertia ad quartam.

Sint quatuor magnitudines A prima, B ſecunda, C ter tia, & D quarta: quantacumque autem magnitudine propo ſita, ex infinitis quæ proponi poſſunt eiuſdem generis cum A, C, vel vna tantum, ſi AC ſint eiuſdem generis: vel vna, & altera; ſi vna vnius, altera ſit alterius generis; ſemper aliæ duæ magnitudines vnà maiores, quàm AC, minori exceſsu magnitudine propoſita; eandem habeant proportio nem, maior quàm A ad B, & maior quàm C ad D. Dico eſse vt A ad B, ita C ad D. Poſita enim E ad D, vt A ad B, & F maiori quàm C vtcumque, ſint aliæ duæ magnitudines, G maior quàm A minori exceſsu magnitudine eiuſdem generis cum A, quam quis voluerit, & H maior quàm C minori exceſsu quàm quo F ſuperat C, ideſt, quæ maior ſit quàm C, & minor quàm F: ſit autem vt G ad B, ita H ad D. Quoniam igitur F maior eſt, <34>H, maior erit proportio ipſius F quàm H ad D, hoc eſt quàm G ad B. Sed cum G maior ſit quàm A, maior eſt proportio

[Figure 60]

G ad B, quàm A ad B, multo igitur erit maior proportio F ad D, quàm A ad B. Sed F ponitur maior quàm C, vtcum que; nulla igitur magnitudo maior quàm C eſt ad D, vt A ad B: ſed E ad D, eſt vt A ad B; non igitur eſt E maior quàm C; nec maior proportio E ad D, hoc eſt A ad B, quàm C ad D. Eadem autem ratione nec maior erit proportio C ad D quàm A ad B, hoc eſt non minor A ad B, quàm C ad D; eadem igitur proportio A ad B, quæ C ad D.

Sed aliæ duæ magnitudines vnà minores quàm A, C minori defectu quantacumque magnitudine propoſita, eandem habeant proportionem, minor quàm A ad B, & minor quàm C, ad D. Dico eſse vt A ad B, ita C ad D.

Poſita enim rurſus E ad D, vt A ad B, & F minori quàm C vtcumque, ſit G minor quam A, minori defectu magni tudine eiuſdem generis cum A, quam quis voluerit, & H minor quàm C, & maior quàm F: ſit autem vt G ad B, ita H ad D. Quoniam igitur F minor eſt quàm H, minor erit proportio ipſius F quam H ad D, hoc eſt <34>G ad B: ſed cum G ſit minor <34>A, minor eſt propor- tio G ad B, quàm A ad B; mul to ergo minor proportio F ad D, quàm A ad B: ſed F poni tur minor quàm C vtcumque; nulla igitur magnitudo minor

[Figure 61]

quàm C eſt ad D, vt A ad B: ſed E eſt ad D, vt A ad B: non igitur eſt E minor quàm C, nec minor proportio E ad D, hoc eſt A ad B, quàm C ad D. eadem autem ratione non minor erit proportio C ad D, quàm A ad B; hoc eſt non maior A ad B, quàm C ad D; vt igitur A ad B, ita eſt C ad D. Quod demonſtrandum erat.

ALITE R.

Dico eſse vt A ad B, ita C ad D. Si enim fieri poteſt, ſit minor proportio A ad B quàm C ad D. alia igitur aliqua magnitudo G maior quàm A, eandem habebit proportionem ad B, quam C ad D. Sit autem F maior quam C minori exceſsu magnitudine, quam quis voluerit, & E maior quàm A, & minor quàm G: vt autem

[Figure 62]

E ad B, ita F ad D. Quoniamigitur F maior eſt quàm C, maior erit proportio F ad D, quàm C ad D. Sed vt F ad D, ità eſt E ad B: & vt C ad D, ita G ad B; maior

igitur proportio E ad B, quàm G ad B; quamobrem E maior erit quàm G minor maiori, quod fieri non poteſt. Non igitur minor eſt proportio A ad B quàm C ad D. Eadem autem ratione non minor erit proportio C ad D, quàm A ad B, hoc eſt non maior A ad B, quàm C ad D; eadem igitur proportio A ad B, quæ C ad D.

In ſecunda autem hypotheſis parte, quæ pertinet ad minorem defectum, eſto ſi fieri poteſt maior proportio A ad B, quàm C ad D. erit igitur, & ſit aliqua alia magnitudo G minor quàm A ad B, vt C ad D. Sit autê F minor quàm C minori defectu magnitudine, quam quis voluerit, & E minor quàm A, & maior quàm G, vt autem E ad B ita F ad D. Quoniam igitur maior eſt proportio C ad D, quàm F ad D: ſed vt C ad D, ita eſt G ad B: & vt F ad D, ita E ad B: maior erit proportio G ad B quàm E ad B; quamobrem erit G maior quàm E, minor maiori, quod fieri non poteſt; non igitur ma

[Figure 63]

ior eſt proportio A ad B, quàm C ad D. Eadem autem ra tione non maior erit proportio C ad D, quàm A ad B, hoc eſt non minor A ad B, quàm C ad D. Eadem igitur erit proportio A ad B, quæ C ad D. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO II.

Si maior, vel minor prima ad vnà maiorem, vel minorem ſecunda, minori vtriuſque exceſſu, vel defectu quantacumque magnitudine propoſita fuerit vt tertia ad quartam; erit vt prima ad ſecundam, ita tertia ad quartam.

Sint quatuor magnitudines, A prima, B ſecunda, C tertia, & D quarta: & aliæ duæ magnitudines E F vnà maiores quàm A, B minori exceſsu quantacumque magnitudine propoſita eiuſdem generis cum ipſis A, B. Sit autem E maior quàm A, ad F maiorem quàm B, vt C ad D. Dico eſse A ad B, vt C ad D. Eſto enim, quod fieri poteſt, alia magnitudo G eiuſdem generis cum EF ad aliam H, vt C ad D, vel E ad F. Quoniam igitur eſt permutando vt E ad G, ita F ad H, & ſunt EF vnà maiores quàm AB minori exceſsu quantacumque magnitudine propoſita; erit per antecedentem, vt A ad G, ita B ad H: & permutando A ad B, vt G ad H, hoc eſt vt C ad D. Idem autem ſimiliter oſten deremus poſitis EF minoribus quàm AB, & proportionalibus vt dictum eſt. Manifeſtum eſt igitur propoſitum.

[Figure 64]

ALITER.

Ijſdem poſitis, ſi non eſt A ad B, vt C ad D; vel igitur maior vel minor erit proportio A ad B quàm C ad D: ſit autem maior: vt igitur A ad B, ita erit eadem A ad aliam maiorem <34>B. Eſto illa E. ſintque aliæ duæ magnitudines, G maior quàm A

[Figure 65]

minori exceſsu magnitudine eiuſdem generis cum A, quam quis voluerit, & F maior quàm B, & minor quàm E. ſit autem G ad F vt C ad D. Quoniam igitur & vt C ad D, ita eſt A ad E; erit vt G ad F, ita A ad E; & permutando vt G ad A, ita F ad E: ſed G eſt maior

quàm A: ergo & F maior quàm E, minor maiori, quod eſt abſurdum. Non igitur maior eſt proportio A ad B quàm C ad D: eadem autem ratione non maior erit proportio B ad A quam D ad C, hoc eſt non minor A ad B, quàm C ad D; eſt igitur A ad B, vt C ad D.

[Figure 66]

Rurſus in ſecunda parte hypotheſis, quæ attinet ad minorem defectum: ſi non eſt A ad B vt C ad D; eſto, ſi fieri poteſt, minor proportio A ad B quàm C ad D. igitur A ad aliam quam B minorem eandem habebit proportionem, quam C ad D, eſto illa E: ſintque aliæ duæ magnitudines, G minor quàm A minori defectu magnitudine eiuſdem generis cum A, quam quis voluerit, & F minor quàm B, & maior quàm E: ſit autem G ad F, vt C ad D, hoc eſt vt A ad E. Quoniam igitur permutando eſt vt G ad A, ita F ad E, & G eſt mi-

[Figure 67]

nor quàm A; erit & F minor quàm E, maior minori, quod eſt abſurdum; non igitur minor eſt proportio A ad B quàm C ad D: eadem autem ratione non minor erit proportio B ad A, quàm D ad C, hoc eſt non maior A ad B, quàm C ad D; eſt igitur A ad B vt C ad D. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO III.

Si maior, vel minor prima ad vnà maiorem, vel minorem ſecunda, minori exceſſu, vel defectu

quantacumque magnitudine propoſita, nominatam habuerit proportionem; prima ad ſecundam eandem nominatam habebit proportionem.

Sint duæ magnitudines A, B duarum autem aliarum EF vnà maiorum, vel minorum quàm AB minori exceſsu vel defectu quantacumque magnitudine propoſita, habeat E maior vel minor quàm A ad F vnà maiorem, vel minorem quàm B certam ali quam nominatam proportionem, verbi gratia, ſeſquialteram. Dico A ad B, eandem nominatam habere proportionem: vt A ipſius B eſse ſeſquialteram. Quoniam enim omnis proportio in aliquibus magnitudinibus conſiſtit; ſit magnitudo C ipſius D ſeſquialtera: ſed & E eſt ipſius F ſeſquialtera; vtigitur C, tertia ad D quartam, ita erit E maior, vel minor quàm A prima, ad F vnà maiorem, vel minorem ſecunda, minori, vt ponitur, vtriuſque exceſsu, vel defectu magnitudine propoſita eiuſdem generis cum A, B, quæcumque illa, & quantacumque ſit; erit per præcedentem eadem proportio A ad B, quæ C ad D: ſed proportio quam habet C ad D, eſt ſeſquialtera; ergo & A ipſius B erit ſeſquialtera. Similiter quocumque alio nomine notatam proportionem habeat E ad F, eandem habere A

[Figure 68]

ad B, oſtenderemus, vt duplam, ſeſquitertiam, alicuius du plicatam, vel triplicatam, & ſic de ſingulis. Manifeſtum eſt igitur propoſitum.

Hæc autem propoſitio in paucis exemplaribus, quæ dono quibuſdam dederam, non extat; poſterius enim eam exco-

gitaui, quo ſecunda antecedens hìc in illis tertia facilius ſeruiret ijs, in quibus certæ proportionis nomen, tertium & quartum terminum ſubobſcurè indicat, vt in ſequenti XII iilud, proportio dupla. Illo autem Lemmate, quod prima propoſitio inſcribebatur, nunc ita non egeo, vt primam, & ſecundam, quæ ſecunda, & tertia erant, & facilius demonſtrem, & earum ſenſum paucioribus comprehendam. priora ergo ita non improbo vt hæc ijs anteponam.

PROPOSITIO IIII.

Si ſint tres magnitudines ſe ſe æqualiter excedentes, minor erit proportio minimæ ad mediam quàm mediæ ad maximam.

Sint tres magnitudines inæquales A, BC, DE, quarum BC æquè excedat ipſam A, ac DE ipſam BC Dico minorem eſse proportionem A, ad BC, quàm BC, ad DE. Nam vt eſt A ad BC, ita ſit BC ad LH, & auferatur BF æqualis A, & DG, & LK æquales BC. Quoniam igitur eſt vt A, hoc eſt FB ad BC, ita BC hoc eſt KL ad LH; erit diuidendo vt BF ad FC, ita LK ad KH: & componendo, ac permutando vt BC ad LH, ita FC ad KH. ſed BC eſt minor quàm LH; ergo & FC hoc eſt EG erit minor quàm KH. Sed DE, LH, ſuperant BC exceſsibus EG, KH; minor igitur erit DE quàm LH, & minor proportio BC ad LH, quàm BC ad DE. Sed vt BC ad LH,

[Figure 69]

ita eſt A ad BC; minor igitur proportio erit A ad BC, quàm BC ad DE. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO V.

Si ſit minor proportio primæ ad ſecundam, quàm ſecundæ ad tertiam, ab ipſis autem æquales auferantur; erit minor proportio reliquæ primæ ad reliquam ſecundæ, quam reliquæ ſecundæ ad reliquam tertiæ.

Sit minor proportio AB, ad CD, quam CD, ad EF. Sitque AB, minima. ablatæ autem æquales ſint AG, CH, EK. Dico reliquarum minorem eſse proportionem BG, ad DH, quam BH, ad FH. Ponatur enim CL, æqualis AB, & EM, æqualis CD. Quoniam igitur maior eſt proportio DL ad LH, quam DL, ad LC; erit componendo maior proportio DH ad HL, quam DC ad CL. hoc eſt, maior proportio DH, ad BG, quam DC, ad AB: & conuertendo, minor proportio BG ad DH, quam AB, ad CD: hoc eſt maior proportio AB, ad CD, quam BG, ad DH. Rurſus, quoniam maior eſt proportio CD, ad EF, quam AB, ad CD: hoc eſt quam CL, ad EM; erit permutando, maior proportio CD, ad CL, quam FE, ad EM: & diuidendo, maior DL, ad LC, quam FM, ad ME: & permutando,

[Figure 70]

maior DL, ad FM, quam CL, ad EM: hoc eſt quam AB, ad CD. Sed maior erat proportio AB, ad CD, quam BG ad DH; multo igitur maior proportio erit DL, ad FM, quam BG, ad DH: hoc eſt quam LH, ad MK: & permutando, maior proportio DL, ad LH, quam FM, ad MK: & componendo, maior DH, ad HL, quam FK,

ad KM: & permutando, maior DH ad FK, quam LH, ad MK: hoc eſt, quam BG, ad DH: hoc eſt minor proportio BG ad DH, quam DH, ad FK. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO VI.

Si ſint tres magnitudines inæquales, & aliæ illis multitudine æquales binæque in duplicata primarum proportione. Sit autem minor proportio primæ ad ſecundam, quam ſecundæ ad tertiam in primis; erit minor proportio primæ ad ſecundam, quam ſecundæ ad tertiam in ſecundis.

Sint tres magnitudines A, B, C, & aliæ illis multitudine æquales D, E, F. quarum ipſius D ad E proportio ſit duplicata eius, quæ eſt A ad B: & E ad F, duplicata eius, quæ eſt B ad C. ſit autem minor proportio A ad B, quam B ad C. Dico minorem eſse proportionem D ad E, quam E ad F. Sit enim vt C ad B, ita B ad G: & vt B ad A, ita A ad H. Igitur G ad C duplicata erit proportio ipſius G ad B, hoc eſt B ad C: ſimiliter erit H ad B, duplicata proportio ipſius A ad B. Vt igitur eſt H ad B, ita erit D ad E: & vt G ad C, ita E ad F. Rurſus, quia minor eſt proportio

[Figure 71]

A ad B, quam B ad C, ſed vt A ad B, ita eſt H ad A

& vt B ad C, ita G ad B; erit ex æquali minor proportio H ad B, quam G ad C, ſed vt H ad B, ita erat D, ad E: & vt G ad C, ita E ad F; minor igitur proportio erit D ad E, quam E ad F. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO VII.

Si ſint octo magnitudines quaternæ proportionales: tertiæ autem vtriuſque ordinis inter ſo ſint vt primæ; erit vt compoſita ex primis ad com poſitam ex ſecundis, ita compoſita ex tertiis ad compoſitam ex quartis.

Sint octo magnitudines quaternæ ſumptæ proportionales, vt A ad B, ita C ad D. & vt E ad F, ita G ad H. ſit autem vt A ad E, ita C ad G. Dico eſse vt AE, ad ABF, ita CG, ad DH. Quoniam enim componendo eſt vt AE, ad E, ita, CG, ad G; ſed vt E ad F, ita eſt G, ad H; erit ex æquali, vt AE, ad F, ita CG, ad H. Eadem ratione erit vt AE, ad B, ita CG, ad D: & conuertendo, vt B ad AE, ita D ad CG. ſed vt AE, ad F, ita erat CG ad H; ex æquali igitur erit vt B ad F, ita D, ad H: & componendo, vt BF ad F, ita DH ad H: & conuertendo, vt F ad BF, ita H, ad DH. Sed vt AE, ad F, ita erat CG ad H; ex æqua li igitur erit vt AE ad BF, ita CG, ad DH. Quod demonſtrandum erat.

[Figure 72]

PROPOSITIO VIII.

Si ſint tres magnitudines ſe ſe æqualiter excedentes; & aliæ eiuſdem generis illis multitudine æquales, binæque ſumptæ in duplicata primarum proportione; erit vtriuſque ordinis minor proportio compoſitæ ex primis ad compoſitam ex ſecundis, quam compoſitæ ex ſecundis ad compoſitam ex tertijs.

Sint tres magnitudines A, B, C, quarum C maxima æque ſuperet B, atque B, ipſam A. & totidem eiuſdem generis D, E, F, ſitque F ad E duplicata proportio ipſius C ad B: & E ad D, duplicata ipſius B ad A. Dico AD, ſimul ad BE, ſimul minotem eſſe proportionem quam BE, ſimul ad CF, ſimul. Eſto enim recta quæpiam GH, ad aliam rectam ſibi in directum poſitam HK, vt magnitudo A ad ipſius F duplam (hoc enim fieri poteſt) &

[Figure 73]

ſuper baſim GK; conſtituatur triangulum GLK, atque in eo deſcribatur parallelogrammum GHMN: & vt eſt

C ad B, ita ſiat HM, ad Mque & vt B ad A, ita QM, ad MP, & ipſi GK, parallelæ TPR, VQS, ducantur. Quoniam igitur eſt vt C, ad duplam ipſius F, ita GH, ad HK; erit vt C ad F, ita eſt par llelogrammum GM, ad triangulum MHK: ſed vt C, ad B, ita eſt HM, ad Mque hoc eſt parallelogrammum GM, ad parallelogrammum MV: & vt F, ad E, ita triangulum MHK, ad triangulum MQS, ob duplicatam proportionem eius, quæ eſt HM ad Mque hoc eſt ipſius C ad B; vt igitur trapezium NK, ad NS trapezium, ita erit, per præcedentem, CF, ſimul ad BE ſimul. Rurſus quoniam eſt conuertendo, vt parallelogrammum MV, ad parallelogrammum GM, ita B ad C. ſed vt parallelogrammum GM, ad triangulum KHM, ita erat C, ad F: & vt triangulum KHM, ad triangulum QSM, ita F ad E; erit ex æquali, vt parallelogrammum MV, ad triangulum SQM, ita B, ad E. Similiter ergo vt ante erit vt trapezium NS, ad NR trapezium, ita EB, ſimul ad AD, ſimul. Rurſus, quoniam æque excedit LV, ipſam LT, atque LG, ipſam LV; minor erit proportio LT ad LV, quam LV, ad LG: eſt autem trianguli LTR ad triangulum LVS, duplicata proportio ipſius LT, ad LV, & trianguli LVS, ad triangulum LGK, duplicata ipſius LV, ad LG, propter ſimilitudinem triangulorum; minor igitur proportio erit trianguli LTR, ad triangulum LVS, quam trianguli LVS, ad triangulum LGK; dempto igitur triangulo LNM, communi, minor erit proportio trapezij NR, ad trapezium NS, quam trapezij NS, ad trapezium NK. Sed vt trapezium NR, ad trapezium NS, ita eſt conuertendo AD ſimul ad BE, ſimul: & vt trapezium NS, ad trapezium NK, ita BE, ſimul ad CF, ſimul; minor igitur proportio erit AD, ſimul ad BE ſimul, quam BE ſimul ad CF, ſimul. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO IX.

Si recta linea vtcumque ſecta fuerit, cubus qui fit à tota æqualis eſt duobus ſolidis rectangulis, quæ ex partibus, & totius quadrato fiunt.

Sit recta linea AB ſecta in puncto C vtcumque. Dico cubum ex AB æqualem eſse duobus ſolidis rectangulis, quæ fiunt ex AC CB, & quadrato AB. Quoniam

[Figure 74]

enim communi altitudine AB, eſt vt rectangulum BAC ad quadratum AB, ita ſolidum ex AB, & rectangulo BAC ad cubum ex AB, eademque ratione vt rectangulum ABC, ad quadratum AB, ita ſolidum eſt AB, & rectangulo ABC ad cubum ex AB; erunt vt duo rectangula BAC, ABC ad quadratum AB, ita duo ſolida ex AB, & rectangulis BAC, ABC ad cubum ex AB. Sed duo rectangula BAC, ABC ſunt æqualia quadrato AC; duo igitur ſolida ex AB, & rectangulis BAC, CBA, æqualia ſunt cubo ex AB. Sed ſolidum ex AB & rectangulo BAC eſt id quod fit ex AC, & AC & quadrato AB; duo igitur ſolida ex AC, CB, & quadrato AB ſimul ſumpta æqualia ſua cubo ex AB. Si igitur recta linea vtcumque ſecta fuerit, &c. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO X.

Si recta linea vtcumque ſecta fuerit, cubus qui fit à tota æqualis eſt cubis partium, & duobus ſolidis rectangulis, quæ partium triplis, & earundem quadratis reciproce continentur.

Sit recta linea AB ſecta vtcumque in puncto C. Dico cubum ex AB æqualem eſse duobus cubis ex AC, CB, & duobus ſolidis rectangulis, quorum alterum fit ex tripla

[Figure 75]

ipſius AC, & quadrato BC; alterum autem ex tripla ipſius BC, & quadrato AC. Quoniam enim quadratum ex AB æquale eſt duobus quadratis ex AC, CB, & ei quod bis fit ex AC CB: & parallelepipeda eluſdem altitudinis inter ſe ſunt vt baſes; erit rectangulorum folidorum id quod fit ex AC, & quadrato AB æquale cubo ex AC, & ei, quod fit ex AC, & rectangulo ACB bis, & ei, quod ex AC, & quadrato BC. Eadem ratione erit quod fit ex BC, & quadrato AB æquale cubo ex BC, & ei, quod fit ex BC, & rectangulo ACB, bis & ei, quod ex BC, & quadrato AC. Sed cubus ex AB æqualis eſt duobus ſolidis ex AC CB. & quadrato AB; cubus igitur ex AB æqualis eſt duobus cubis ex AC CB, & ſex ſolidis, quorum tres fiunt ex AC, & duobus rectangulis ex AC CB, & quadrato BC: tria vero ex BC, & duobus rectangulis ex AC CB, & quadrato AC. Sed quod fit ex AC, & rectangulo ACB, eſt quod fit ex BC, &

quadrato AC: & quod fit ex BC, & rectangulo ACB, eſt quod fit ex AC, & quadrato BC; cubus igitur ex AB æqualis eſt duobus cubis ex AC CB, vna cum ſex ſolidis, quorum tria fiunt ex AC, & BC quadrato, tria autem ex BC, & quadrato AC, hoc eſt duobus ſolidis, quorum alterum fit ex tripla ipſius AC, & quadrato BC, alterum ex tripla ipſius BC & quadrato AC. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XI.

Si recta linea vtcumque ſecta fuerit, cubus qui fit à tota æqualis eſt cubis partium vna cum ſolido rectangulo, quod totius tripla, & partibus continetur.

Sit recta linea AB ſecta in puncto C vtcumque. Dico cubum ex AB æqualem eſse duobus cubis ex AC, CB, vna cum ſolido rectangulo ex AC CB, & tripla ipſius AB. Quoniam enim quod fit ex AC, & rectangulo ACB, eſt id quod fit ex BC, & quadrato AC: & quod fit ex BC, & rectangulo ACB, eſt id, quod fit ex

[Figure 76]

AC & quadrato BC. ſed duo ſolida ex AC CB, & rectangulo ACB ſunt id, quod fit ex compoſita vtriuſque altitudine AB, et rectangulo ACB; duo igitur prædicta ſolida, quæ ex AC CB, & earum quadratis reciproce fiunt æqualia ſunt ſolido ex AB BC CA, & triplum triplo, videlicet duo ſolida, quæ fiunt reciproce ex triplis

ipſarum AC, CB, & quadratis ex AC CB, æqualia ſimul ei, quod ter fit ex AB, BC, CA, hoc eſt ei, quod partibus AC CB, & totius AB tripla continetur: additis igitur communibus duobus cubis ex AC, CB, erit id, quod ſit ex AC CB, & tripla ipſius AB, & duo cubi ex AC CB, æqualia duobus ſolidis, quæ fiunt reciproce ex triplis ipſarum AC, CB, & earundem AC, CB, quadratis, & duobus cubis ex AC, CB, hoc eſt cubo ex AC. Si igitur recta linea vtcumque ſecta fuerit, &c. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XII.

Hemiſphærium duplum eſt coni, cylindri autem ſubſeſquialterum eandem ipſi baſim, & eandem altitudinem habentium.

Eſto hemiſphærium; cuius axis BD, baſis circulus, cuius diameter AC, ſuper quem cylindrus AE, & conus

[Figure 77]

ABC, quorum communis axis ſit BD, ac propterea etiam eadem altitudo. Dico hemiſphærium ABC, coni ABC eſse duplum: cylindri autem AE ſubſeſquialterum. ſuper baſim enim circulum RE, vertice D deſcribatur

conus EDR. Sectoque axe BD primo bifariam, deinde ſingulis eius partibus rurſus bifariam, tranſeant per puncta ſectionum plana baſi hemiſphærij AC æquidiſtantia, quæ ſecent hemiſphærium, conum, & cylindrum. Sectus igitur erit AE cylindrus in cylindros æqualium altitudinum: ſuper ſectiones autem coni, atque hemiſphærij nempe circulos, quorum centra in axe BD exiſtunt cylindri conſtituti intelligantur binis quibuſque proximis æquidiſtantibus planis interiecti, quorum axes omnes æquales in BD. Erit igitur cono EDR inſcripta, & ABC

[Figure 78]

hemiſphærio circumſcripta figura quædam ex cylindris æqualium altitudinum. Sint autem hæ figuræ ea ratione hæc circumſcripta illa inſcripta, vt circumſcripta excedat hemiſphærium, minori exceſsu, inſcripta vero deficiat à cono minori defectu quam ſit magnitudo propoſita, quantacumque illa ſit. His conſtitutis, manifeſtum eſt, reliquo cylindri AE dempto hemiſphærio inſcriptam eſse figuram ex reſiduis cylindrorum, in quos cylindrus AE ſectus fuerit, demptis cylindris hemiſphærio circumſcriptis, deficientem à reliquo cylindri AE dempto hemiſphærio minori defectu magnitudine propoſita, eodem ſcilicet, quo figura hemiſphærio circumſcripta excedit hemiſphærium, excepto reſiduo cylindri infimi AS, dempta hemiſphærij portione, quam comprehendit. Sit autem om-

nium prædictorum cylindri AE cylindrorum ſupremus FE, cuius axis BH, & communis ſectio plani per punctum H tranſeuntis baſi hemiſphærij cum plano per axim BD, ſit recta FGKHMNL. Quoniam igitur rectangulum DHB bis vna cum duobus quadratis DH, BH, æquale eſt BD quadrato: & rectangulum DHB bis vna cum quadrato BH, eſt rectangulum ex BD DH tanquam vna, & BH; rectangulum ex BD, DH tanquam vna & BH, vna cum quadrato DH æquale erit quadrato BD, hoc eſt quadrato FH: quorum quadratum KH æquale eſt rectangulo ex BD, DH, tanquam vna, & BH; reliquum igitur quadrati FH dempto quadrato KH æquale erit reliquo quadrato DH, hoc eſt quadrato GH: & quadruplum quadruplo reliquum quadrati FL dempto quadrato MK toti GN quadrato, hoc eſt reliquum circuli, FL dempto circulo MK, æquale circulo GN. Quare & GP, cylindrus reliquo cylindri FE dempto QK, cylindro æqualis erit, propter æqualitatem altitudinum. Similiter oſtenderemus ſingula reliqua cylindrorum eiuſdem altitudinis, in quos totus cylindrus AE ſectus fuit, demptis cylindris hemiſphærio circumſcriptis æqualia eſſe ſingulis cylindris cono EDR inſcriptis, quæ inter eadem plana interijciuntur. Tota igitur figura ex prædictis cylindrorum reſiduis reliquo cylindri AE, dempto hemiſphærio inſcripta æqualis erit figuræ cono EDR inſcriptæ: deficit autem vtraque harum figurarum hæc à cono ADR, illa à reſiduo cylindri AE dempto hemiſphærio minori exceſsu magnitudine vtcumque propoſita; reliquum igitur cylindri AE dempto hemiſphærio æquale eſt cono EDR, ſed conus EDR; hoc eſt conus ABC cylindri AE eſt pars tertia; reliquum igitur cylindri AE dempto hemiſphærio, cylindri AE eſt pars tertia, hoc eſt cylindrus AE triplus dicti reſidui: quamobrem AE cylindrus ſeſquialter hemiſphærij ABC: & conuertendo, hemiſphærium

cylindri AE ſubſeſquialterum: coni igitur ABC duplum. Manifeſtum eſt igitur propoſitum.

PROPOSITIO XIII.

Omnis minor ſphæræ portio, ad cylindrum, cuius baſis æqualis eſt circulo maximo, altitudo autem eadem portioni, eam habet proportionem, quam exceſſus, quo tripla ſemidiametri ſphæræ excedit tres deinceps proportionales, quarum ma xima eſt ſphæræ ſemidiameter, media vero quæ inter centra ſphæræ & baſis portionis interijcitur; ad ſemidiametri ſphæræ triplam.

Sit ſphæræ, cuius centrum D, ſemidiameter BD, minor portio ABC, cuius axis BG ſegmentum ſemidiametri BD, baſis autem circulus, cuius diameter AC. Sitque EF, cylindrus, cuius axis, ſiue altitudo eadem BG: baſis autem æqualis circulo maximo, cuius ſemidiameter BD. Dico portionem ABC, ad cylindrum EF eam habere pro-

[Figure 79]

portionem, quam exceſſus, quo tripla ipſius BD, ſuperat tres BD, DG; & minorem extremam ad ipſas, quæ ſit M; ad ipſius BD triplam. vertice enim D, baſi cylindri EF, cuius diameter FH deſcribatur conus FDH, cuius intelligatur fruſtum FHKL abſciſsum plano, quod ab-

ſcidit portionem ABC, plano circuli FH parallelum. Quoniam igitur fruſtum FHKL æquale eſt cylindri EF reſiduo, dempta ABC portione, quod ex præcedenti theo remate perſpicuum eſse debet: erit portio ABC æqualis ei, quod relinquitur cylindri EF, ſi fruſtum auferatur FHKL: ſed hoc reliquum eſt ad cylindrum EF, vt exceſſus, quo tripla lineæ FH, ſuperat tres deinceps proportionales FH, KL, & minorem extrema, ad triplam lineæ FH: vt FH, ad KL, ita eſt BD ad DG, & DG, ad M; vt igitur exceſſus, quo tripla ipſius BD, ſuperat tres BD, DG, & M, ſimul, ad lineæ BD triplam, ita erit portio ABC ad cylindrum EF. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XIV.

Omnis portio ſphæræ abſciſsa duobus planis parallelis alteroper centrum acto ad cylindrum, cuius baſis eſt eadem baſi portionis, ſiue circulo maximo, & eadem altitudo, eam habet proportionem, quam exceſſus, quo maior extrema ad ſphæræ ſemidiametrum, & axim portionis excedit tertiam partem axis portionis; ad maiorem extremam antedictam.

Sit portio AB CD, ſphæræ, cu ius centrum F, abſciſſa duobus planis parallelis altero per centrum F tranſeunte; axis autem portionis ſit FG: &

[Figure 80]

maior baſis, circulus maximus, cuius diameter AD, minor autem, cuius diameter BC: & cylindrus AE, cuius baſis circulus AD, axis FG; & vt FG ad FA, ita ſit FA, ad MN, à qua abſcindatur NO, pars tertia ipſius FG. Dico ABCD portionem ad cylindrum AE eſſe vt OM ad MN. Poſita enim G H, æquali ipſi FG, deſcribatur circa axim FG, cylindrus LK, & conus HFK. Quoniam igitur duo cylindri AE, LK, ſunt eiuſdem al-

[Figure 81]

titudinis, erunt inter ſe vt baſes, AD, KH. hoc eſt cylindrus AE ad cylindrum LK, duplicatam habebit proportionem diametri AD, ad diametrum KH, hoc eſt eius, quæ eſt ſemidiametri AF ad ſemidiametrum GH. hoc eſt eam, quæ eſt MN ad GH, ſiue FG. Sed vt FG ad tertiam ſui partem NO, ita eſt cylindrus KL, ad conum KFH; ex æquali igitur, erit vt MN ad NO, ita cylindrus AE ad conum KFH, hoc eſt ad reliquum cylindri AE dempta ABCD portione: & per conuerſionem rationis, vt NM, ad MO, ita cylindrus AE ad portionem ABCD: & conuertendo, vt MO ad MN, ita portio ABCD ad cylindrum AE. Quod eſt propoſitum.

PROPOSITIO XV.

Omnis portio ſphæræ abſciſſa duobus planis parallelis neutro per centrum, nec centrum intercipientibus ad cylindrum, cuius baſis æqualis eſt

circulo maximo, altitudo autem eadem portioni, eam proportionem habet, quam exceſſus, quo maior extrema ad triplas ſemidiametri ſphæræ, & eius quæ inter centrum ſphæræ, & minoris baſis portionis interijcitur, ſuperat tres deinceps proportionales, quarum maxima eſt quæ inter centra ſphæræ, & minoris baſis, media autem, quæ inter centræ ſphæræ, & maioris baſis portionis interijcitur; ad maiorem extremam antedictam.

Sit portio ABCD ſphæræ, cuius centrum E, abſciſsa duobus planis parallelis, neutro per E tranſeunte, nec E intercipientibus, cuius maior baſis ſit circulus, cui diameter AD. minor autem cuius diameter BC, axis GH. circa quem cylindrus OS, conſiſtat, cuius baſis ſit circulus circa SR æqualis circulo maximo: ſphæræ autem ſemidiater ſit EHG. & vt GE ad EH, ita ſit HE ad V: & po-

[Figure 82]

ſita T tripla ipſius EF, & X itidem tripla ipſius EG, vt X

ad T, ita fiat T ad ZY, cuius Zω, tribus GE, EH, V
ſimul ſit æqualis. Dico ABCD portio-
nem ad cylindrum SO eſse vt ωϒ ad ϒZ.
Abſciſsa enim GK ipſi EG æquali, cylin-
drus PN circa axim GH, & conus KEN
conſtituantur vt in præcedenti. planum igi-
tur abſcindens portionem facit fruſtum coni
KEN, quod ſit KLMN, cuius minor ba-
ſis circulus, cui diameter LM; maior autem
cui diameter KN. Et vt eſt GE ad EF, hoc
eſt GK ad SH, ita ſit EF, vel SH, ad I.
vt igitur in præcedenti, oſtenderemus cylin-
drum SO ad cylindrum PN eſse vt I ad
GK ſiue ad EG. Quoniam igitur ſunt ter
næ deinceps proportionales GE, EF, I, &
X, T, ZY, eſtque vt FE ad EG ita T ad X;
erit vt I ad EG, hoc eſt vt cylindrus SO ad
PN cylindrum ita ZY ad X. Et quoniam eſt vt
GE ad EH, ita EH ad V: hoc eſt, vt GK ad
LH. ita LH ad V: & ponitur X tripla ipſius

[Figure 83]

EG, hoc eſt ipſius GK, vt autem eſt triplaipſius GK ad
tres deinceps proportionales GK, LH, V, ita eſt cylin-
drus PN ad fruſtum LKNM; erit vt X ad tres GE, EH,
V ſimul hoc eſt ad lineam ωZ, ita cylindrus PN ad fru-

ſlum KLMN. Sed vt ZY ad X, ita erat cylindrus SO ad PN cylindrum; ex æquali igitur erit vt ZY ad Zω, ita cylindrus SO ad fruſtum KLMN: hoc eſt, ad reliquum cylindri SO dempta ABCD portione, & per conuerſionem rationis, vt ZY, ad Yω, ita cylindrus SO ad portionem ABCD: & conuertendo vt ωY ad YZ, ita portio ABCD ad SO cylindrum. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XVI.

Omnis maior ſphæræ portio ad cylindrum, cuius baſis æqualis eſt circulo maximo, altitudo autem eadem portioni eam habet proportionem, quam ad axim portionis habet exceſſus, quo ſegmentum axis portionis inter ſphæræ centrum, & baſim portionis interiectum ſuperat tertiam partem minoris extremæ maiori poſita prædicto axis ſegmento in proportione ſemidiametri ſphæræ ad prædictum ſegmentum, vna cum ſubſeſqui altera reliqui axis ſegmenti.

[Figure 84]

Sit ſphæræ, cuius centrum G, diameter DGE maior portio ABC, axis autem portionis BGF, communis cylindro KH, cuius baſis æqualis ſit circulo maximo; baſis autem

portionis circulus, cuius diameter AC, & vt EG ad GF, ita ſit GF ad S, & S ad FM, cuius ſit pars tertia FN, & ponatur ipſius BG, ſubſeſquialtera GL. Dico portionem ABC ad cylindrum KH eſse vt LN ad BF. Nam vt FG ad GE, ſiue ad BG, ita ſit EG ad PQ, à qua abſcindatur QR, pars tertia ipſius FG. Et plano per G tranſeunte baſibus cylindri KH, & ABC portionis parallelo ſecentur vna cylindrus KH in duos cylindros DH, EK: & portio ABC, in portionem ECAD, & DBE hemiſphærium. Quoniam igitur eſt conuertendo, vt PQ ad EG, ita EG ad GF, & eſt ipſius GF pars tertia QR, erit portio DACE ad cylindrum EK, vt PR ad Pque Rurſus, quia eſt vt EG ad GF: hoc eſt vt PQ ad EG, ita GF ad S, & vt EG ad GF, ita eſt S ad FM; erit ex æqua

[Figure 85]

li, vt PQ ad GF, ita GF ad FM. Sed vt GF ad RQ, ita eſt MF ad FN, tertiam ipſius MF partem, ex æquali igitur erit vt PQ ad QR, ita GF ad FN, & per conuerſionem rationis, & conuertendo, vt PR ad PQ, ita NG ad GF. Sed vt PR ad PQ, ita erat portio ECAD ad cylindrum EK; vtigitur NG ad GF, ita erit portio EC AD ad cylindrum EK. Sed vt GF ad FB, ita eſt cylindrus EK ad cylindrum KH: ex æquali igitur vt NG ad BF, ita portio ECAD, ad cylindrum KH. Similiter oſtenderemus eſse, vt GL ad BF, ita DBE hemiſphæ-

rium ad cylindrum KH, cum vt LG ad GB, ita ſit hemiſphærium DBE ad cylindrum DH. vt igitur prima cum quinta ad ſecundam, ita tertia cum ſexta ad quartam; videlicet, vt tota LN ad BF, ita portio ABC ad cylindrum KH. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XVII.

Omnis portio ſphæræ abſciſſa duobus planis parallelis centrum intercipientibus ad cylindrum, eiuſdem altitudinis, cuius baſis æqualis eſt circulo maximo, eam habet proportionem, quam ad axim portionis habet exceſſus, quo axis portionis ſuperat tertiam partem compoſitæ ex duabus minoribus extremis, maioribus poſitis duobus axis ſegmentis, quæ fiunt à centro ſphæræ in rationibus, ſemidiametri ſphæræ ad prædicta ſegmenta.

Sit portio AB CD, ſphæræ, cuius centrum G, abſciſsa duobus planis parallelis centrum G intercipientibus, quod erit in axe portionis, qui ſit HK. Sectiones autem

[Figure 86]

factæ à prædictis planis ſint circuli, quorum diametri AD, BC, qui circuli erunt baſes oppoſitæ portionis. Sectaque per punctum G, portione ABCD plano ad axim erecto,

atque ideo & portionis baſibus parallelo; ſuper ſectionem, quæ erit circulus maximus, cuius diameter LM, duo cylindri deſcripti intelligantur, ad oppoſita portionis baſium pla na terminati ex illis autem totus cylindrus compoſitus EF, cuius baſis æqualis circulo maximo LM. Deinde in ſegmento GH ſumpta OH, tertia parte minoris extremæ maiori GH in proportione, quæ eſt LG ad GH; & in ſegmento GK, ſumatur

[Figure 87]

NK, tertia pars minoris extremæ maiori GK, in proportione, quæ eſt LG ad GK. Dico portionem ABCD ad cylindrum EF, eſse vt NO ad KH. Sumptis enim ijſdem, quæ in præcedentis ſumpſimus, demonſtrationem ſimiliter oſtenderemus tam portionem LBCM ad cylindrum EF, eſse vt OG ad KH, quam portionem LA DM ad eundem EF cylindrum, vt NG ad eundem axim KH, vt igitur prima cum quinta ad ſecundam, ita tertia cum ſexta ad quartam: videlicet, vt NO ad KH, ita por tio ABCD ad EF cylindrum. Quod demonſtrandum crat.

PROPOSITIO XVIII.

Omne conoides parabolicum dimidium eſt cylindri, coni autem ſeſquialterum eandem ipſi baſim, & eandem altitudinem habentium.

Sit conoides parabolicum ABC, & cylindrus AE, & conus ABC, quorum omnium ſit eadem baſis circulus, cuins diameter AC, axis autem BD, ac proinde vna omnium altitudo. Dico conoidis ABC eſse cylindri AE dimidium, coni autem ABC ſeſquialterum. Secto enim axe BD in tot partes æquales, quarum infima ad baſim ſit MD, vt figura ex cylindris æqualium altitudinum conoidi ABC circumſcripta, inſcriptam ſuperet minori ſpacio quantacumque magnitudine propoſita, & ſit hoc factum. Et quoniam quibus planis parallelis tranſeuntibus per præ-

[Figure 88]

dictas ſectiones axis BD ſecatur conoides ABC, ijſdem ſecatur triangulum per axim ABC, eruntque ſectiones parallelæ: ſit triangulo ABC circumſcripta figura ex parallelogrammis æqualium altitudinum, quæ triangulum & ipſa excedat minori ſpacio quantacumque magnitudine propoſita. Cylindrorum autem qui ſunt circa conoides, & parallelogrammorum multitudine æqualium, quæ ſunt circa triangulum ABC, duo proximi baſi AC cylindri ſint AF, HL, & totidem parallelogramma illis reſpondentia inter eadem plana parallela ſint AF, GK. Quoniam igi-

tur in parabola ABC rectis ad diametrum ordinatim applicatis eſt vt BM ad BD longitudine, ita MH ad AD potentia: hoc eſt, ita circulus, cuius diameter HMN, ad circulum, cuius diameter ADC, hoc eſt ita cylindrus HL, ad cylindrum AF propter æqualitatem altitudinum: ſed vt BM ad BD, ita eſt GM ad AD, propter ſimilitudinem triangulorum, hoc eſt ita parallelogrammum GK ad AF, parallelogrammum; ergo vt parallelogrammum GK ad paral lelogrammum AF, ita eſt cylindrus HL ad cylindrum AF. Similiter oſtenderemus reliqua parallelogramma, quæ ſunt

[Figure 89]

circa triangulum ABC eſse cum reliquis cylindris, qui ſunt circa conoides ABC bina ſumpta prout inter ſe reſpondent in eadem proportione; ſemper igitur componendo, & ex æquali erit vt tota figura triangulo ABC circumſcripta ad parallelogrammum AF, ita figura conoidi circumſcripta ad AF cylindrum: ſed vt parallelogrammum AF, ad parallelogrammum AE, ita eſt cylindrus AF ad cylindrum AE, propter æqualitatem omnifariam ſumptarum altitudinum; ex æquali igitur erit vt figura triangulo ABC circumſcripta ad parallelogrammum AE, ita figura conoidi

ABC circumſcripta ad AE cylindrum: vtraque autem circumſcriptarum figurarum excedit ſibi inſcriptam minori ſpacio quantacumque magnitudine propoſita, vt igitur triangulum ABC, ad parallelogrammum AE, ita erit conoides ABC, ad cylindrum AE. Sed triangulum ABC eſt parallelogrammi AE dimidium; igitur conoides ABC eſt cylindro AE dimidium: ſed cylindrus AE eſt coni ABC, triplum: igitur conoides ABC, erit coni ABC ſeſquialterum. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XIX.

Omnis priſmatis triangulam baſim habentis centrum grauitatis rectam lineam, quæ cuiuſlibet trium laterum bipartiti ſectionem, & oppoſiti parallelogrammi centrum iungit, ita diuidit, vt pars, quæ attingit latus ſit dupla reliquæ.

Sit priſma, quale diximus ABCDEF, ſectoque vno ipſius latere BF in puncto G, bifariam parallelogrammi oppoſiti ſit centrum H, & iuncta GH, cuius pars GK ſit dupla reliquæ KH. Dico priſmatis ABCDEF, centrum grauitatis eſſe K. Per punctum enim H ducatur NO ipſi AE, vel CD parallela, quæ ipſas AC, ED, ſecabit bifariam: iunctisque BN, FO, ducatur per punctum K, ipſi FB, vel NO

[Figure 90]

parallela LM. Quoniam igitur eſt vt HK ad KG, ita NL ad LB, & OM ad MF, erit NL, ipſius LB, & OM

ipſius MF dimidia: ſed & rectæ BN, FO, triangulorum baſes AC, ED, bifariam ſecant; erunt igitur puncta L, M, centra grauitatis triangulorum ABC, DEF, oppoſitorum. Priſmatis igitur ABCDEF axis erit LM: quare in eius bipartiti ſectione priſmatis ABC DEF centrum grauitatis: ſectus autem eſt axis LM bifariam in puncto K; nam ob parallelogram ma eſt vt NH ad HO, ita LK ad KM; priſmatis igitur ABC DEF, centrum grauitatis erit K. Quod demonſtrandum erat.

[Figure 91]

PROPOSITIO XX.

Omnis priſmatis baſim habentis trapezium, cuius duo latera inter ſe ſint parallela centrum grauitatis rectam lineam, quæ æque inter ſe diſtantium parallelogrammorum centra iungit, ita diuidit, vt pars, quæ dictorum parallelogrammorum minus attingit ſit ad reliquam, vt duorum baſis la terum parallelorum dupla maioris vna cum mino ri ad duplam minoris vna cum maiori.

Sit priſma ABCDEFGH, cuius baſis trapezium ABCD, habens duo latera AD, BC, inter ſe parallela, ſitque eorum AD maius: parallela igitur erunt inter ſe duo parallelogramma BG, AH. Sit parallelogrammi AH centrum K, & BG parallelogrammi centrum L, iuncta-

que LK, fiat vt dupla ipſius AD vna cum BC ad duplam ipſius BC vna cum AD, ita LR ad RK. Dico priſmatis AG centrum grauitatis eſse R. Ducantur enim per puncta L, K lateribus priſmatis, atque ideo inter ſe parallelæ MN, OP, quæ ob centra K, L, ſecabunt oppoſita parallelogrammorum latera bifariam, eas ſectiones connectant MO, NP, ipſique MN, vel OP, parallela ducatur Q RS. Quoniam igitur eſt vt LR ad RK, hoc eſt vt dupla ipſius AD vna cum BC ad duplam ipſius BC vna cum AD, ita OQ ad QM, & recta MO bifa-

[Figure 92]

riam ſecat AC trapezij latera parallela, punctum Q, AC trapezij centrum grauitatis; ſimiliter & punctum S erit EG, trapezij centrum grauitatis: priſmatis igitur AG axis erit QS, & centrum grauitatis R, quod eſt in medio axis. Omnis igitur priſmatis baſim habentis trapezium, &c. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XXI.

Si à quolibet prædicto priſmate duo priſmata beſes habentia triangulas ſint ita abſciſſa, vt parallelepipedum relinquant baſim habens minus parallelogrammorum inter ſe parallelorum prædicti priſmatis, maioris autem partes æqualia parallelogramma ipſum parallelepipedum relin-

quat, centrum grauitatis vtriuſque abſciſsi priſ-
matis tamquam vnius magnitudinis rectam line-
lam, quæ prædicti priſmatis parallelorum paral
lelogrammorum centra iungit, ita diuidit, vt
pars, quæ minus parallelogrammum attingit ſit
dupla reliquæ.

Sit priſma ABCDEFGH, cuius baſes oppoſitæ tra-
pezia ADHE, BCGF. Sint autem AD, EH, paral-
lelæ, quarum maior EH. Oppoſita igitur parallelogram-
ma AC, EG, inter ſe erunt parallela, quorum maius EG.
At per rectas AB, CD, ſectum ſit priſma. ABCDEF
GH, ita vt abſciſſa priſmata ABSFER, CDVHGT,
relinquant parallelepipedum AT, ipſum autem AT, re-
linquat duo parallelogramma æqualia ES, TH. Poſito
autem centro K
parallelogrammi
AC, & L, paral
lelogrammi EG,
iunctaque KL,
ponatur KM, du
pla ipſius ML.
Dico duorum priſ-
matum BER,
CVH, ſimul cen
trum grauitatis

[Figure 93]

eſse M. Sectis enim AB, CD, bifariam in punctis P, Q,
ſumptiſque parallelogrammorum ES, VG, centris N, O,
iungantur PN, QO, & poſita PX dupla ipſius XN, & QZ
dupla ipſius ZO, iungantur rectæ PKQ, XZ, NO.
Quoniam igitur in quadrilatero PQON, recta XZ, pa-
rallela eſt vtrilibet ipſarum PQ, NO, ſecat ijs parallelis
interceptas in eaſdem rationes; recta igitur XT per pun-

ctum M tranſibit. Sed quia PK eſt æqualis KQ, & NL ipſi LO, etiam XM æqualis erit ipſi MZ ob parallelas; cum igitur priſmatum BER, CVH centra grauitatis ſint X, Z; erit vtriuſque priſmatis prædicti ſimul centrum grauitatis M. Quod eſt propoſitum.

PROPOSITIO XXII.

Si ſint duæ pyramides æquales, & æque altæ, baſes habentes in eodem plano, quarum vertices recta linea connectens cum ea, quæ baſium centra grauitatis iungit ſit in eodem plano; earum centrum grauitatis tamquam vnius magnitudinis rectam lineam, quæ inter vertices, & centra baſium interiectas bifariam ſecat, itadiuidit, vt pars ſuperior ſit inferioris tripla.

[Figure 94]

Sint duæ pyramides æquales, & æque altæ, quarum baſes in eodem plano AC, DB, vertices autem G, H, & baſium centra E, F, iunctæque EF, GH, quas bifariam ſecet recta KL, huius autem pars quarta ſit LM. Dico vtriuſque pyramidis GAC, HDB, ſimul centrum grauitatis eſſe M. Iunctis enim GE, HF, ſumantur ea-

rum quartæ partes EN, FO, & iungatur NO. Quoniam igitur propter æqualitatem altitudinum, & quia EF, GH, ſunt in eodem plano, ſunt EF, GH, inter ſe parallelæ, & vt GN ad NE, ita eſt HO ad OF; erit NO ipſi E Fivel GH, parallela, quas KL bifariam ſecat: igitur & ipſam NO ſecabit bifariam, iungit autem recta NO centra grauitatis pyramidum æqualium GAC, HDB, vtriuſ-

[Figure 95]

que ergo pyramidis ſimul centrum grauitatis erit in communi ſectione duarum linearum KL, NO, ſed recta NO, ſecans ſimiliter ipſas GE, KL, HF, ipſam KL, ſecabit in puncto M; punctum igitur M, erit prædictarum pyramidum centrum grauitatis. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XXIII.

Omnis fruſti pyramidis baſim habentis parallelogrammum centrum grauitatis maiori baſi eſt propinquius, quam punctum illud, in quo axis ſic diuiditur, vt pars minorem baſim attingens ſit ad reliquam vt dupla cuiuſuis laterum maioris baſis vna cum latere minoris ſibi reſpondente, ad duplam dicti lateris minoris baſis vna cum maioris ſibi reſpondente.

Sit pyramidis, cuius baſis parallelogrammum EFGH, fruſtum ABCDEFGH, eiuſque axis KL, quo ſecto in pun cto α ita vt K α ad α L, ſit vt laterum homologorum AD EH, dupla ipſius EH vna cum AD ad duplam ipſius AD vna cum EH, & fruſti ABCDEFGH ſit centrum grauitatis nempe in axe KL. Dico punctum , cadere infra punctum α. A punctis enim A,B,C,D, ducantur

[Figure 96]

ad maiorem baſim axi KL, parallelæ AN, BO, CR, DS, & parallelepipedum ABCDNORS compleatur, & productis baſis NO lateribus, deſcriptæ ſint quatuor pyramides AEMNZ, BOPFY, CGXRQ, DHVST, quarum baſes erunt parallelogramma circa diametrum æqualia, atque ſimilia: & quatuor priſmata triangulas baſes habentia, quorum binorum ex aduerſo inter ſe reſpon-

dentium parallelogramma in plano EG exiſtentia erunt inter ſe æqualia, atque ſimilia, ſcilicet MS ipſi OQ, & ZO, ipſis RV: ſitque axis KL pars tertia L β, quarta autem L δ. Quoniam ìgitur ex ſupra demonſtratis priſmatis ABCDTMPQ eſt centrum grauitatis α; duorum autem priſmatum oppoſitorum ABYONZ, CDS RXV, centrum grauitatis β, erit reliqui ex fruſto AB

[Figure 97]

CDEFGH demptis quatuor prædictis pyramidibus in α β centrum grauitatis, quod ſit γ. Nam ex primo libro conſtat punctum α cadere ſupra punctum β, ſi compleatur trapezium ACGE, cuius diameter erit KL. Sed earum quatuor pyramidum eſt centrum grauitatis δ. Si enim baſium, quibus binæ oppoſitæ pyramides inſiſtunt centra grauitatis, & bini oppoſiti vertices ſingulis rectis li-

neis connectantur, erunt binæ connectentes parallelæ, & ab axe K L bifariam ſecabuntur, vt figuræ deſcriptio inanifeſtat. Totius igitur fruſti ABCDEFGH, centrum grauitatis in linea $\gamma\ \delta$ cadet: ſed punctum γ cadit infra punctum α, multo ergo inferius, & baſi EG propinquius punctum quam punctum α. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XXIV.

Omnis fruſti conici centrum grauitatis propinquius eſt maiori baſi quam punctum illud, in quo axis ſic diuiditur, vt pars minorem baſim attingens ſit ad reliquam, vt dupla diametri maior is baſis vna cum minoris diametro ad duplam diametri minoris baſis vna cum diametro maioris.

Hoc eadem ratione deducetur ex antecedenti, qua centrum grauitatis fruſti conici in extremo primo libro demon ſtrauimus, quandoquidem ſimiliter vt ibi fecimus, omnis pyramidis centro grauitatis idem probaremus accedere quod prædictæ pyramidis in antecedente.

PROPOSITIO XXV.

Si ſint quotcumque magnitudines, & aliæ illis multitudine æquales, binæque ſumptæ in eadem proportione, quæ commune habeant centrum gra uitatis, centra autem grauitatis omnium ſint in eadem recta linea; primæ & ſecundæ tanquam

duæ magnitudines commune habebunt centrum grauitatis.

Sit recta linea AB, & quotcumque magnitudines FGH, & totidem KLM, binæ in eadem proportione: nimirum vt F ad G ita K ad L: & vt G ad H ita L ad M. in recta autem AB, ſint communia centra grauitatis, C duarum FK, & D duarum GL: & E duarum HM. Omnium autem primarum tamquam vnius magnitudinis ſit centrum grauitatis O. Dico & omnium ſecundarum ſimul centrum grauitatis eſse O. Duarum enim FG ſi-

[Figure 98]

mul ſit centrum grauitatis N. Vtigitur eſt F ad G, hoc eſt, vt K ad L, ita erit DN, ad NC. punctum igitur N eſt centrum grauitatis duarum magnitudinum KL ſimul. Rurſus, quia componendo, & ex æquali, eſt vt FG ſimul ad H, ita KL ſimul ad M: eſt autem tam duarum FG, quam duarum KL ſimul centrum grauitatis N, ſimiliter vt ante oſtenderemus duarum magnitudinum FGH, KLM centrum grauitatis eſse O. Quod eſt propoſitum.

PROPOSITIO XXVI.

Si ſint quotcumque magnitudines, & aliæ ipſis multitudine æquales primarum, ex quibus centra grauitatis in eadem recta linea diſpoſita ſint alternatim ad centra grauitatis ſecundarum, qua-

rum magnitudinum binæ eodem ordine, qui ſumitur ab eodem prædictæ lineæ termino vnain primis, & alterain ſecundis inter ſe ſint æquales; omnium primarum ſimul, ex quibus primæ centrum grauitatis propinquius eſt prædicto lineæ termino quàm primæ ſecundarum, propinquius erit prædicto lineæ termino quàm omnium ſecun darum ſimul centrum grauitatis.

Sint quotcumque magnitudines ABC primæ, & totidem ſecundæ DEF, quarum centra grauitatis in recta linea TV, primarum quidem G ipſius A proximum om-

[Figure 99]

nium termino T, à quo ſumitur ordo. Deinde H ipſius B, & K, ipſius C, diſpoſita ſint alternatim ad centra ſecundarum; videlicet vt centrum grauitatis L, ipſius D cadat inter centra G, H, & M ipſius E inter centra H, K: & N inter puncta K, V: ſint autem æquales binæ AD, BE, CF: & omnium ABC ſimul centrum grauitatis P, & omnium DEF ſimul centrum grauitatis O. Dico punctum P propinquius eſſe termino T, quàm punctum O. Duarum enim A, B ſit centrum grauitatis R: & S, duarum DB, & Q, duarum DE. Quoniam igitur Q eſt centrum grauitatis duarum magnitudinum DE ſimal; erit vt D ad E, hoc eſt ad B, ita MQ, ad QL: hoc eſt HS, ad SL. & componendo, vt ML, ad LQ, ita HL, ad LS; & permutando, vt ML ad LH, ita LQ ad LS: ſed ML eſt maior quàm LH; ergo & LQ erit maior quàm LS. Eadem ratione quoniam S eſt centrum gra-

uitatis duarum DB: & R duarum AB: & AD ſunt æquales; erit RH maior quàm SH: ſed quia LQ erat maior quàm LS, eſt & SH maior quàm QH; multo igitur maior RH erit quàm QH: atque ideo punctum R propinquius termino T, quàm punctum que Rurſus quoniam tota magnitudo AB eſt æqualis toti DE, & C æqualis F; erunt duæ primæ AB, & C, & totidem ſecundæ DE, & F, quarum vnius poſteriorum DE centrum grauitatis Q cadit inter R, K centra grauitatis duarum priorum AB, & C, & reliquæ priorum C centrum grauitatis K cadit inter Q, N, duarum poſteriorum DE, & F centra grauitatis; erunt vt antea quatuor magnitudines binæ proximæ æquales, ſcilicet AB, ipſi

[Figure 100]

DE: & C ipſi F, centra grauitatis habentes diſpoſita alternatim in eadem recta TV. Cum igitur primæ priorum AB, centrum grauitatis R ſit termino T propinquius quàm Q centrum grauitatis primæ poſteriorum, quæ eſt tota DE; ſimiliter vt ante totius magnitudinis ABC centrum grauitatis P erit termino T propinquius quàm totius DEF centrum grauitatis O. Non aliter oſtenderemus, quotcumque plures magnitudines, quales & quemadmodum diximus ad rectam TV, diſpoſitæ proponerentur, ſemper centrum grauitatis omnium priorum ſimul termino T propinquius cadere, quàm omnium poſteriorum ſimul centrum grauitatis. Manifeſtum eſt igitur propoſitum.

PROPOSITIO XXVII.

Si ſint quotcumque magnitudines, & aliæ illis multitudine æquales, quæ binæ commune habeant in eadem recta centrum grauitatis; ſumpto autem ordine ab vno eius lineæ termino, maior ſit proportio primæ ad ſecundam in primis, quàm primæ ad ſecundam in ſecundis: & ſecundæ ad tertiam in primis maior quàm ſecundæ ad tertiam in ſecundis, & ſic deinceps vſque ad vltimas; erit omnium primarum ſimul centrum grauitatis propinquius prædicto lineæ termino, à quo ſumitur ordo, quàm omnium ſecundarum.

Sint quotcumque magnitudines GHI, & totidem LMN. Sitque maior proportio G ad H, quàm L ad M: & H ad I, maior quàm M ad N: in recta autem AB ſint communia centra grauitatis, C duarum magnitudinum GL, & D duarum HM, & E duarum IN. omnium

[Figure 101]

autem primarum GHI ſimul ſit centrum grauitatis K: at ſecundarum omnium LMN centrum grauitatis R. Dico centrum K cadere termino A propinquius quàm centrum R. Fiat enim vt G ad H, ita DP ad PC: & vt L ad M, ita DQ ad QC. Maior igitur proportio erit DP

ad PC, quàm DQ ad QC: & componendo, maior DC ad CP, quàm DC ad CQ: minor igitur CP erit quàm CQ: quare DP maior quàm Dque & communi addita ED, erit EP maior quàm Eque Et quoniam K eſt centrum grauitatis omnium GHI ſimul, & ipſius GH eſt centrum grauitatis P, & reliquæ magnitudinis I, centrum grauitatis E; erit vt GH ad I, ita EK ad KP. eadem ratione vt vtraque LM ad N, ita erit ER ad Rque Rur-

[Figure 102]

ſus, quia maior eſt proportio G ad H, quàm L ad M, erit componendo, maior proportio GH ad H, quàm LM ad M: ſed maior eſt proportio H ad K, quàm M ad N; ex æquali igitur, maior erit proportio GH ad I, quàm LM ad N, hoc eſt EK ad KP, quàm ER ad Rque Multo ergo maior proportio EK ad KP, quàm ER ad RP: & componendo maior proportio EP ad PK quàm EP ad PR; minor igitur PK erit quàm PR, at que ideo centrum K propinquius termino A quàm centrum R. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XXVIII.

Si ſint quotcumque magnitudines, & aliæ ipſis multitudine æquales, quarum omnium centra grauitatis ſint in eadem recta linea, & centra primarum ad centra ſecundarum diſpoſita ſint alternatim: ſit autem maior proportio primæ ad ſecun-

dam in primis quàm primæ ad ſecundam in ſecun
dis: & ſecundæ ad tertiam in primis, maior quàm
ſecundæ ad tertiam in ſe cundis, & ſic deinceps vſ-
que ad vltimas; erit omnium primarum ſimul cen
trum grauitatis propinquius prædictæ lineæ ter-
mino à quo ſumitur ordo omnium ſecundarum
centrum grauitatis.

Sit quotcumque magnitudines GHI, & totidem LMN
primarum autem ſint centra grauitatis CDE cum ſecun
darum centris OPQ in eadem recta AB diſpoſita alter-
natim, vt O cadat inter puncta CD, & P inter puncta
DE, & E inter puncta Pque ſitque maior proportio G
ad H, quàm L ad M, & H ad I maior quàm M ad N.
omnium autem primarum GHI ſimul ſit centrum gra-
uitatis T; at omnium ſecundarum LMN, ſimul, cen-

[Figure 103]

trum grauitatis V. Dico punctum T eſſe termino A
propinquius quàm punctum V. Eſto enim F æqualis
L, & K æqualis M, & X æqualis N, ſit autem cen-
trum grauitatis ipſius F in puncto C, & ipſius K in pun-
cto D, & ipſius X in puncto E. In recta igitur AB om-
nium FKX, ſimul centrum grauitatis erit termino A, pro-
pinquius quàm omnium LMN ſimul centrum grauitatis.
Sed & omnium GHI, ſimul centrum grauitatis in eadem
recta AB propinquius eſt termino A quàm omnium
FKX, ſimul centrum grauitatis; multo igitur termino A
propinquius erit omnium GHI ſimul quàm omnium

LMN, ſimul centrum grauitatis. Quod demonſtrandum erat.

ALITER.

Poſito enim R centro grauitatis duarum magnitudinum G, H, & S duarum L,M, vel punctum V cadit in puncto E, vel in linea EB, vel in linea AE, ſi in puncto E vel in linea EB, cum igitur T ſit centrum grauitatis trium magnitudinum G,H,I ſimul, & E ipſius I, erit punctum T propinquius termino A quàm punctum V. Sed punctum V in linea AE cadat. Veligitur S centrum grauitatis duarum magnitudinum L, M, ſimul cadit in puncto D, ſiue in linea DB, vel in linea AD. ſi in puncto D, vel in linea DB; centrum grauitatis R duarum magnitudinum GH erit termino A propinquius quàm ipſum S, & recta ER maior quàm ES,

[Figure 104]

Sed cadat punctum S in linea AD. Quoniam igitur maior eſt proportio G ad H, quàm L ad M: & vt G ad H, ita eſt DR ad RG, & vt L ad M, ita PS ad SO, maior erit proportio DR ad RC, quàm PS ad SO; multo ergo maior DR ad RC, quàm DS ad SO, & multo maior quàm DS ad SC, & componendo maior proportio DC ad CR, quàm DC ad CS; erit igitur CR minor quàm CS, atque adeo RD maior DS, addita igitur ED communi, erit ER maior quàm ES. Rurſus quia componendo, & ex æquali maior eſt proportio totius GH ad I quàm totius LM ad N, hoc eſt maior longitudinis ET ad TR, quàm QV ad VS, & multo maior quàm

EV ad VS, erit componendo, maior proportio ER ad RT quàm ES ad SV: & per conuerſionem rationis minor proportio FR ad ET; quàm ES ad EV, & permutando minor proportio ER ad ES quàm ET ad EV: ſed ER maior erat quàm ES, ergo ET maior erit quàm EV: & punctum T propinquius termino A, quàm punctum V. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XXIX.

Datæ figuræ circa diametrum, vel axim in alteram partem deficienti, ſuper baſim rectam lineam vel circulum, vel ellipſim; cuius figuræ baſis, & ſectiones omnes parallelæ ſegmenta æqualia diametri vel axis intercipientes ita ſe habeant, vt quarumlibet trium proximarum minor proportio ſit minimæ ad mediam, quàm mediæ ad maximam; figura quædam ex cylindris, vel cylindri portionibus, vel parallelogrammis æqualium altitudinum circumſcribi poteſt, cuius centrum grauitatis ſit propinquius baſi quàm cuiuſlibet datæ figuræ, qualem diximus quæ prædictæ figuræ circadiametrum, vel axim circumſcripta ſit.

Sit figura circa diametrum, vel axim in alteram partem deficiens qualem diximus, cuius bafis circulus, vel ellipſis vel recta linea AC, axis autem vel diameter BD. Et data figura ipſi ABC figuræ circumſcripta compoſita ex cylindris, vel cylindri portionibus, vel parallelogrammis æqualium altitudinum EF, GH, AK. Dico figuræ ABC alteram figuram, qualem diximus poſſe circumſcribi, cuius centrum

grauitatis, nempe in linea BD, ſit propinquius baſi AC, ſiue termino D, quàm prædictæ datæ figuræ circumſcriptæ centrum grauitatis, Omnium enim cylindrorum, vel cylindri portionum, vel parallelogrammorum, ex quibus conſtat prædicta data figura circumſcripta ſint axes, vel quæ oppoſita latera coniungunt rectæ BL, LM, MD, quibus ſectis bifariam in punctis N, O, P, ac planis per ea ſiue rectis tranſeuntibus baſi AC parallelis, ſecantibusque dictos cylindros, vel cylindri portiones, vel parallelogramma, compleatur & figuræ ABC circumſcribatur altera figura vt prior, quæ ob ſectiones factas componetur ex duplis multitudine cylindris, vel cylindri portionibus, vel parallelogrammis ęqualium altitudinum, eorum ex quibus conſtat data figura circumſcripta ſinautem hi cylindri, aut reliqua, quæ diximus QR,

[Figure 105]

ES, TV, GX, ZI, AY. Quoniam igitur cylindrorum, vel cylindri portionum, vel parallelogrammorum quæ ſunt circa figuram ABC, minor eſt proportio QR ad ES, quàm ES, ad TV, propter ſectiones circulos, vel ſimiles ellipſes, vel rectas lineas, & æqualitatem altitudinum, & figuræ propoſitæ naturam. Sed eadem ratione minor eſt proportio ES ad TV, quàm TV, ad GX; multo ergo minor proportio erit QR ad ES, quam TV ad GX: & componendo, minor proportio QR, ES, ſimul ad ES, quàm TV, GX, ſimul ad GX. ſed vt GX ad GH, ita eſt ES ad EF; ex æqua-

li igitur minor erit proportio QR, ES ſimul ad EF, quàm TV, GX ſimul ad GH. & permutando, minor proportio QR, ES ſimul ad TV, GX ſimul quàm EF ad GH. & conuertendo, maior proportio GX, TV ſimul ad ES, QR ſimul, quàm GH ad EF. Similiter oſtenderemus duo ZI, AY, ſimul ad TV, GX, ſimul, maiorem habere proportionem, quàm AK ad rectarum GH. Rurſus quoniam puncta N, O, in medio BL, LM, ſunt, ipſorum EF, GH, centra grauitatis: duorum autem QR, ES ſimul centrum grauitatis eſt in linea NL, propterea quòd ES maius eſt quàm QR, & æquales BN, NL, quas centra grauitatis ipſorum QR, ES bifariam diuidunt, cadet ipſorum QR, ES, ſimul centrum grauitatis propius termino D, quàm ipſius EF centrum grauitatis, & duobus centris N, O, interijcietur. Eademque ratione duorum TV, GX, ſimul centrum grauitatis termino D erit propinquius quàm ipſius GH centrum grauitatis, & duobus centris O, P, duorum GH, AK interijcietur. Et duorum ZI, AY ſimul centrum grauitatis propinquius erit D termino, quàm P ipſius AK. Quoniam igitur omnia primarum magnitudinum, ex quibus conſtat figura ſecundo circumſcripta centra grauitatis in eadem re cta linea BD, diſpoſita ſunt alternatim ad centra grauitatis ſecundarum primis multitudine æqualium, ex quibus data figura conſtat ipſi ABC figuræ circumſcripta, ſunt termino D propinquiora, quàm centra grauitatis ſecundarum, ſi bina, prout inter ſe reſpondent comparentur: maior autem proportio oſtenſa eſt primæ ad ſecundam in primis, quàm primæ ad ſecundam in ſecundis: & ſecundæ ad tertiam in primis, quàm ſecundæ ad tertiam in ſecundis, ſumpto ordine à termino D, erit centrum grauitatis omnium primarum ſimul, ideſt figuræ ipſi ABC figuræ ſecundo circumſcriptæ termino D propinquius, quàm datæ figuræ eidem ABC figuræ primo circumſcriptæ cen-

trum grauitatis. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XXX.

Omnis prædictæ figuræ centrum grauitatis eſt propinquius baſi, quàm cuiuſlibet figuræ ex cylindris, vel cylindri portionibus, vel parallelogrammis æqualium altitudinum ipſi circumſcriptæ.

Sit prædicta figura ABC, cuius axis vel diameter BD, & data intelligatur figura ex quotcumque cylindris, vel cylindri portionibus, vel parallelogrammis æqualium altitudinum figuræ ABC circumſcripta, cuius ſit centrum grauitatis E, nempe in axe vel diametro BD. Dico centrum grauitatis figuræ ABC propinquius eſſe puncto D, quàm punctum E. Si enim fieri poteſt, centrum grauitatis figuræ ABC, quod ſit F, non cadat infra punctum E, ſed vel ſupra, vel congruat puncto E: figuræ itaque ABC circumſcribatur figura quædam ex cylindris, vel cylindri portionibus, vel parallelogrammis <17>qualium altitudinum, cuius centrum

[Figure 106]

grauitatis, quod ſit G, ſit propinquius D puncto, quàm punctum E, ac propterea propinquius, quàm punctum F, centrum grauitatis figuræ primo circumſcriptæ. Rurſus multiplicatis cylindris, vel cylindri portionibus, vel paral-

lelogrammis circumſcribatur figuræ ABC, altera tertia figura, quemadmodum diximus in præcedenti, cuius centrum grauitatis H, in linea GD cadat & ſit minor proportio reſidui huius tertiæ figuræ circumſcriptæ ipſi ABC, ad figuram ABC, quàm FG ad GD. Multo ergo minor proportio erit dicti reſidui ad figuram ABC quam F H ad HD, fiat igitur vt prædictum reſiduum ad figuram ABC, ita ex contraria parte FH ad HDK; prædicti igitur reſidui centrum grauitatis erit K, extra ipſius terminos, quod fieri non poteſt: Non igitur F centrum grauitatis figuræ ABC cadit in puncto E, nec ſupra; ergo infra pun ctum E: & ponitur E centrum grauitatis cuiuslibet figuræ ex cylindris, vel cylindri portionibus, vel parallelogrammis æqualium altitudinum quo modo diximus ipſi ABC circumſcriptæ. Manifeſtum eſt igitur propoſitum.

PROPOSITIO XXXI.

Omni prædictæ figuræ figura quædam ex cylin dris, vel cylindri portionibus, vel parallelogrammis æqualium altitudi num circumſcribi poteſt, cuius centri graui tatis diſtantia à prædictæ figuræ centro grauitatis ſit minor quantacunque longitudine propoſita.

[Figure 107]

Sit figura ABC in alteram partem deficiens ſupradicta, cuius centrum grauitatis F, propoſita autem quantacumque longitudine minor ſit FG ipſius BF. Dico figuræ ABC figu-

ram ex cylindris vel cylindri portionibus, vel parallelogrammis æqualium altitudinum circumſcribi poſſe, cuius centrum grauitatis ſit propinquius puncto F, quàm punctum G: figuræ enim ABC figura, qualem diximus circumſcribatur, cuius reſiduum dempta figura ABC, ad figuram ABC minorem habeat proportionem, quàm FG, ad GB, ſit autem figuræ circumſcriptæ centrum grauitatis K, nempe in axe, vel diametro BD. Dico lineam FK minorem eſſe quàm FG, atque adeo longitudine propoſita. Quoniam enim F eſt centrum grauitatis figuræ ABC, erit centrum grauitatis K, figuræ circumſcriptæ ipſi ABC propinquius termino B, quàm punctum F, ſed centrum grauitatis figuræ ABC quòd eſt F, & figuræ circumſcriptæ, quod eſt K & eius reſidui dem-

[Figure 108]

pta figura ABC ſunt in communi axe, vel diametro BD; erit igitur dicti reſidui in linea BK, centrum grauitatis, quod ſit H. Minor autem proportio eſt prædicti reſidui ad figuram ABC, hoc eſt ipſius FK ad KH, quàm FG ad GB, & multo minor, quàm FG ad GH; & componendo minor proportio FH ad HK, quàm FH ad HG; ergo KH maior erit, quàm GH; reliqua igitur F K minor, quàm FG atque adeo longitudine propoſita. Fieri ergo poteſt, quod proponebatur.

PROPOSITIO XXXII.

Si duarum prædictarum figurarum circa communem axim, vel diametrum, vel alterius diametrum alterius axim, baſes, & quotcumque ſectiones quales diximus, binæ in eodem plano fuerint proportionales; idem punctum in diametro, vel axe erit vtriuſque centrum grauitatis.

Sint duæ prædictæ figuræ ABC, DBE, circa eandem diametrum, vel axim BF. figuræ autem ABC ſit centrum grauitatis G, nempe in linea BF. Dico G eſſe centrum grauitatis figuræ DBE. ſi enim non eſt, ſit aliud punctum H, quod cadat primo ſupra punctum G. Figuræ igitur ABC, figura circumſcribatur qualem diximus ex cylindris, vel cylindri portionibus, vel parallelogrammis æqualium altitudinum cuius centri grauitatis K diſtantia à

[Figure 109]

centro G, figuræ ABC ſit minor quàm recta GH: & figuræ DBE, figura circumſcribatur ex cylindris, vel cylindri portionibus vel parallelogrammis æqualium altitudinum, multitudine æqualium ijs, ex quibus conſtat ipſi ABC,

figura circumſcripta, quæ cum prædictis circa figuram AB C erunt bina ſumpto ordine à puncto B, in eadem proportione inter eadem plana parallela, vel rectas parallelas conſiſtentia, propter ſectiones, ideſt baſes, & æquales altitudines: binorum autem quorumque homologorum idem erit in linea BF, centrum grauitatis: punctum igitur K, centrum grauitatis figuræ ipſi ABC circumſcriptæ, idem erit figuræ ipſi DBE, circumſcriptæ centrum grauitatis: cadi autem infra centrum grauitatis H figuræ DBE, quod eſt abſurdum.Non igitur centrum grauitatis figuræ DB E, cadit ſupra pun ctum G. Sed cadat infra, vt in puncto L. Rurſus igi tur figuræ DBE figura, qualem diximus circumſcripta, cuius centrum grauitatis M, ſit propinquius centro L,

[Figure 110]

quàm punctum G, figuræ ABC altera qualem diximus figura circumſcribatur, cuius centrum grauitatis ſit idem punctum M, quod fieri poſſe conſtat ex ſuperioribus. Sed G ponitur centrum grauitatis figuræ ABC; ergo centrum grauitatis figuræ ipſi ABC, circumſcriptæ erit propinquius baſi & puncto F, quàm figuræ ABC centrum grauitatis, quod fieri non poteſt. Non igitur figuræ DBE centrum gra uitatis cadit infra punctum G. Sed neque ſupra; punctum igitur G erit commune duarum figurarum ABC, DBE, centrum grauitatis. Quod demonſtrandum erat.

COROLLARIVM.

Manifeſtum eſt autem omnia proximis quatuor propoſitionibus oſtenſa de figura circa axim, vel diametrum in alteram partem deficienti, eadem ijſdem rationibus oſten ſa remanere de compoſito ex duabus figuris circa communem axim vel diametrum in alteram partem deficientibus, tam per ſe conſiderato, quàm ad alteram figuram circa eundem axim, vel diametrum cum prædicto compoſito, in alteram partem deficiens, ac ſi eſſent duæ tantummodo dictæ figuræ, quales in præcedenti proxima inter ſe comparauimus; manente ſemper illa conditione, quàm de ſectionibus in vigeſima huius diximus. Tantum aduertendum eſt, vt pro ſectionibus, dicamus compoſita ex binis ſectionibus (quæ ſcilicet fiunt ab codem plano, vel eadem recta linea) cum de prædicto com poſito ſit ſermo: & in demonſtratione, procylindris, vel cylindri portionibus, vel parallelogrammis, compoſita ex binis cylindris, vel cylindri por tionibus, vel parallelogrammis(quæ ſcilicet ſunt inter eadem plana parallela, vel lineas parallelas, & circa eundem axim, vel diametrum totius vel diametri, vel axis partem) ſicut & pro figura compoſitum ex duabus dictis figuris: pro reſiduo, com poſitum ex reſiduis. Nam cum vtriuſque reſidui

figurarum duobus prædictis figuris vnum quid componentibus, & circa eundem axim, vel diametrum exiſtentibus, qua ratione diximus, circumſcriptarum, centra grauitatis ſint in diametro, vel axe; etiam compoſiti ex ijs duobus reſiduis (vt in priori libro generaliter demonſtrauimus, centrum grauitatis erit in eadem diametro, vel axe: vnde vim habent proximæ quatuor antecedentes demonſtrationes, exemplum erit in demonſtratione trigeſimæ quartæ huius.

PROPOSITIO XXXIII.

Hemiſphærij centrum grauitatis eſt punctum illud in quo axis ſic diuiditur, vt pars, quæ ad verticem ſit ad reliquam vt quin que ad tria.

Eſto hemiſphærium ABC cuius vertex B, axis BD: ſit autem BD ſectus in G puncto, ita vt pars BG ad GD ſit vt quinque ad tria. Dico G eſse centrum grauitatis hemiſphærij ABC. Abſcindatur enim BK ipſius BD pars quarta: & ſuper baſim eandem hemiſphærij eundemque axim BD cylindrus AF conſiſtat, & conus intelligatur EDF, cuius vertex D, baſis autem circulus circulo AC oppoſitus, cuius diameter EBF. Sectoque axe BD bifariam in puncto H, & ſingulis eius partibus rurſus bifariam, quoad BD ſecta ſit in partes æquales cuiuſcumque libuerit numeri paris, tranſeant per puncta ſectionum plana quædam baſi AC parallela, & ſecantia, hemiſphærium, conum, & cylindrum, quorum omnes ſectiones erunt circuli, terni in codem plano ad aliam atque

aliam trium harum figurarum pertinentes. Quod ſi præterea factæ ſectiones hemiſphærij ABC à cylindri AF ſectionibus, circuli à circulis concentricis auferri intelligantur; reliquæ totidem erunt ſectiones reliquæ figuræ ſolidæ, dempto ABC hemiſphærio ex toto AF cylindro, circuli deficientes circulis concentricis, hoc eſt prædictis ABC hemiſphærij ſectionibus prout inter ſe reſpondent. Nunc ſuper ſectiones hemiſphærij ABC, & coni EDF cylindris conſtitutis circa axes, quæ ſunt ſegmenta æqualia axis BD, intelligantur duæ figuræ ex cylindris æqualium altitudinum, altera inſcripta hemiſphærio ABC, altera cono EDF circumſcripta. Si igitur à toto AF cylindro auferatur figura, quæ inſcripta eſt hemiſphærio ABC, relinquetur figura quædam ex cylindris circa prædictos axes, vt ſunt BK, KH, HL, LD, deficientibus ijs cylindris, ex quibus conſtat figura inſcripta hemiſphærio ABC, & vno integro ſupiemo XF cylindro, circumſcripta reſiduo AF cylindri dempto A BC hemiſphærio, circumſcriptione interna: talis autem figuræ circumſcriptæ centrum grauitatis, per ea, quæ in primo libro, erit in axe BD, quemadmodum & aliarum duarum figurarum ex cylindris, quarum altera inſcripta eſt hemiſphærio ABC, altera cono EDF circumſcripta.

[Figure 111]

Quoniam igitur quo exceſsu hemiſphærium ABC ſuperat ex cylindris figuram ſibi inſcriptam, eodem figura circumſcripta reliquo cylindri AF, dempto ABC hemiſphærio, ſuperat ipſum reſiduum; figura autem inſcripta hemiſphærio ABC poteſt eſſe eiuſmodi, quæ ab hemiſphærio deficiat minori defectu quantacumque magnitudine propoſita; poterit figura, quæ prædicto reſiduo circumſcripta eſt eſſe talis, quæ ipſum reſiduum ſuperet mino i exceſsu quantacumque magnitudine propoſita.
Ru ſus, quia quemadmodum cylindrus AN infimus deficiens cylindro SR, æqualis eſt cylindro TP, ex ſupe-

[Figure 112]

rioribus, ita vnuſquiſque aliorum cylindrorum deficientium cylindris, qui ſunt in hemiſphærio, ex quibus cylindris deficientibus conſtat dicto reſiduo figura circumſcripta, æqualis eſt cylindrorum circa conum EDF, ei, qui cum ipſo eſt inter eadem plena parallela, & circa eundem axem; erunt omnes cylindri circa conum EDF, in eadem proportione cum prædictis cylindris deficientibus, circa prædictum reſiduum, ſi bini ſumantur inter eadem plana parallela, & circa eundem axem. Quemadmodum igitur omnium cylindrorum, qui circa conum EDF minor eſt proportio primi ad verticem D, ad ſecundum, quàm ſecundi ad tertium, & ſecundi ad tertium, quàm ter-

tij ad quartum, & ſic ſemper deinceps vſque ad vltimum XF (duplicatæ enim ſunt talium cylindrorum rationes earum, quas inter ſe habent diametri æqualibus exceſsibus differentes circulorum, qui ſunt ſectiones coni, & baſes cylindrorum, ex quibus conſtat figura cono EDF circumſcripta, ſumpta progreſſione proportionum eodem ordine gradatim à minima diametro vſque ad maximam EF) ita erit cylindrorum deficientium, ex quibus conſtat figura circumſcripta reliquo cylindri AF, dempto ABC hemiſphærio, minimi, cuius axis DL ad ſecundum minor proportio, quàm ſecundi ad tertium, & ſic deinceps, vſque ad maximum XF, communiter ad conum EDF, & prædictum reſiduum pertinentem, ſicut & eorum baſes circuli deficientes, quæ ſunt dicti reſidui ſectiones. Cum igitur tam maximi cylindri XF communis, quàm binorum quorumque reliquorum cylindrorum circa conum EDF, & prædictum reſiduum inter eadem plana parallela conſiſtentium, quorum axis communis in BD, commune centrum grauitatis in axe BD exiſtat, erit ex antecedenti punctum K, quod pono centrum grauitatis coni EDF, idem reſidui ex cylindro AF, dempto ABC, hemiſphærio centrum grauitatis. Quoniam igitur quarum partium eſt octo axis BD talium eſt BG quinque, & BK duarum (ponimus enim nunc K coni EDF centrum grauitatis) qualium eſt BD octo, talium erit GK trium: ſed KH eſt æqualis BK; qualium igitur partium eſt GK trium, talium erit KH duarum, taliſque vna GH; dupla igitur KH ipſius GH: ſed ABC hemiſphærium duplum eſt prædicti reſidui, cum ſit cylindri AF, ſubſeſquialterum; vt igitur eſt hemiſphærium ABC, ad prædictum reſiduum, ita ex contraria parte erit longitudo KH, adlongitudinem GH: ſed H eſt centrum grauitatis totius cylindri AF & K, prædicti reſidui dempto ABC hemiſphærio; ergo ABC hemiſphærij centrum grauitatis erit G. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XXXIV.

Omnis minoris portionis ſphæræ centrum gra uitatis eſt in axe primum bifariam ſecto: deinde ſecundum centrum grauitatis fruſti circa eundem axim, abſciſſi à cono verticem habente centrum ſphæræ; in eo puncto, in quo dimidius axis portionis baſim attingens ſic diuiditur, vt pars duabus prædictis ſectionibus intercepta ſit ad eam, quæ inter ſecundam, & tertiam ſectionem interijcitur, vt exceſſus, quo tripla ſemidiametri ſphæræ, cuius eſt prædicta portio, ſuperattres deinceps proportionales, quarum maxima eſt ſphæræ ſemidiameter, media autem, quæ inter centra ſphæræ, & baſis portionis interijcitur; ad ſemidiametri ſphæræ triplam.

Sit minor portio ABC, ſphæræ, cuius centrum D, ſemidiameter BD, in qua axis portionis ſit BG, baſis autem circulus, cuius diameter AC: & circa axim BD deſcriptus eſto conus HDF, cuius baſis circulus FH tangens portionem in B puncto ſit æqualis circulo maximo, & fruſtum coni HDF abſciſſum vna cum portione ABC ſit KHFL, & vt BD ad DG, ita fiat DG ad P: ſectoque axe BG bifariam in puncto N, fiat vt exceſſus, quo tripla ipſius BD ſuperat tres BD, DG, P, tanquam vnam, ita NM, ad MNO. Dico portionis ABC centrum grauitatis eſse O. Nam circa axim BG, ſuper baſim FH ſtet cylindrus EF, cuius cen-

trum grauitatis erit N, reliqui autem eius dempta ABC portione centrum grauitatis M commune fruſto KLFH, vt colligitur ex demonſtratione antecedentis. Quoniam igitur eſt vt exceſsus, quo tripla ipſius BD ſuperat tres BD, DG, P tanquam vnam, ad ipſius BD

[Figure 113]

triplam, hoc eſt vt NM ad MO, ita portio ABC ad EF cylindrum, & diuidendo vt MN ad NO, ita portio ABC ad reliquum cylindri EF; & N eſt cylindri EF, & M prædicti reſidui centrum grauitatis; erit reliquæ portionis ABC centrum grauitatis O. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XXXV.

Omnis portionis ſphæræ abſciſſæ duobus planis parallelis, altero per centrum acto, centrum grauitatis eſt in axe primum bifariam ſecto: deinde ſumpta ad minorem baſim quarta parte axis portionis; in eo puncto, in quo dimidius axis minorem baſim attingens ſic diuiditur, vt pars duabus prædictis ſectionibus intercepta ſit ad eam,

quæ interſecundam, & vltimam ſectionem interijcitur, vt exceſſus, quo maior extrema ad ſphæræ ſemidiametrum, & axim portionis ſuperat tertiam partem axis portionis; ad maiorem extremam antedictam.

Sit portio ABCD ſphæræ, cuius centrum F: axis autem portionis ſit EF abſciſsæ duobus planis parallelis, quorum alterum tranſiens per punctum F faciat ſectionum circulum maximum, cuius diameter AD, reliquam autem ſectionem minorem circulum, quæ minor baſis dicitur, cuius diameter BC: & vt eſt EF ad AD, ita fiat AD ad OP, cuius P R, ſit æqualis tertiæ parti axis EF. Et ſecta EF bi-

[Figure 114]

fariam in puncto M, & poſita EN ipſius EF quarta parte, fiat vt RO ad OP, ita MN ad NL. Dico L eſſe centrum grauitatis portionis ABCD. Nam circa axim EF ſuper circulum maximum AD deſcribatur cylindrus AG, cuius centrum grauitatis erit M: reliqui autem ex cylindro AG dempta ABCD portione centrum grauitatis N. Quoniam igitur eſt vt RO ad OP, hoc eſt vt MN ad NL, ita portio ABCD ad reliquum cylindri AG, & diuidendo vt NM ad ML, ita portio ABCD ad reliquum cylindri AG: & cylindri AG eſt N, prædicti autem reſidui centrum grauitatis M; erit reliquæ portionis ABCD centrum grauitatis L. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XXXVI.

Omnis portionis ſphæræ abſciſſæ duobus planis parallelis neutro per centrum acto, nec centrum intercipientibus, centrum grauitatis eſt in axe primum bifariam ſecto: deinde ſecundum centrum grauitatis fruſti circa eundem axim, abſciſſi à cono verticem habente centrum ſphæræ; in eo puncto in quo dimidius axis maiorem baſim attingens ſic diuiditur, vt pars duabus prædictis ſectionibus finita ſit ad eam, quæ inter ſecundam, & vltimam ſectionem interijcitur, vt exceſſus, quo maior extrema ad triplas & ſemidia metri ſphæræ, & eius quæ inter centra ſphæræ, & minorem baſim portionis interijcitur, ſuperat tres deinceps proportionales, quarum maxima eſt, quæ inter centra ſphæræ, & minoris baſis, media autem, quæ inter centra ſphæræ, & maioris baſis portionis interijcitur; ad maiorem extremam antedictam.

Sit portio ABCD, ſphæræ, cuius centrum E, abſciſsa duobus planis parallelis, neutro per E tranſeunte, nec E intercipientibus: axis autem portionis ſit GH, maior baſis circulus, cuius diameter AD, minor cuius diameter BC: producta autem GH vſque in E intelligatur coni KEN rectanguli, cuius axis EG, fruſtum

KLMN abſciſſum ijſdem planis, quibus portio, & ſphæræ ſemidiameter ſit EHGS: & poſita T tripla ipſius ES, & V ipſius EG tripla, eſto vt V ad T ita T ad XZ: & vt GE ad EH ita EH ad ω, & ſit ZY, ipſius XZ, æqualis tribus GE, EH, ω, vt ſit exceſſus XY: & ſecto axe GH bifariam in puncto I, in linea GI, ſumatur O, centrum grauitatis fruſti KLMN: Et vt ϒX ad XZ, ita fiat IO ad OIP. Dico portionis ABCD centrum grauitatis eſſe P. Nam circa axim GH planis baſium portionis interceptus ſtet cylindrus QR, cuius baſis ſit æqualis circulo maximo. Quoniam igitur eſt vt YX ad XZ, hoc eſt vt IO ad OP, ita portio ABCD ad cylindrum QR, & diuidendo vt OI ad IP, ita portio ABCD ad reliquum cylindri QR: & I eſt cylindri QR, & O prædicti reſidui centrum grauitatis; erit reliquæ por-

[Figure 115]

tionis ABCD centrum grauitatis P. Quod demonſtrandum erat.

LEMMA.

Sit data recta PO, & in ea punctum D, & punctum quoddam R in ipſa DO, ita vt VD ipſius PD, ad DT ipſius DO, ſit vt PD, ad DO: ſit autem maior proportio PS ad SO, quàm VR, ad RT. Dico OS, minorem eſſe quàm OR.

Fiat enim vt PS, ad SO, ita VZ ad ZT; maior igitur erit proportio VZ, ad ZT, quàm VR, ad RT: & componendo maior proportio VT, ad TZ,

[Figure 116]

quàm VT, ad TR; minor igitur TZ, quàm TR, ideſt maior DZ, quàm DR. Rurſus quia componendo eſt vt PO ad OS, ita VT ad TZ: ſed vt DO ad OP, ita eſt DT ad TV; erit ex æquali, vt DO ad OS, ita DT, ad TZ; & per conuerſionem rationis, vt OD ad DS, ita TD ad DZ: & permutando, vt DO ad DT, ita DS ad DZ: ſed DO, eſt maior quàm DT, ergo & DS, erit maior quàm DZ: ſed DZ maior erat quàm DR; multo ergo DS maior quàm DR, vnde minor erit OS quàm OR. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XXXVII.

Si datæ maiori ſphæræ portioni cylindrus circumſcribatur circa eundem axim portionis, centrum grauitatis reliquæ figuræ ex cylindro circumſcripto ablata portione, propinquius erit vertici portionis, quàm centrum grauitatis portionis.

Sit ſphæræ cuius centrum D maior portio ABC, cuius axis BE, baſis circulus cuius diameter AC, & portioni ABC, cylindro XH circa axim BE circumſcripto vt ſupra fecimus: quoniam tam portionis ABC, quàm cylindri XH, centrum grauitatis eſt in axe BE; erit reliqui ex cylindro XH, in axe BE centrum grauitatis, ſint in axe BE centra grauitatis Q portionis ABC & S prædicti reſidui. Dico eſſe punctum S vertici B propinquius

[Figure 117]

quàm punctum que Per centrum enim D tranſiens planum ad axim BE erectum ſecet cylindrum XH, & portionem ABC in duos cylindros KH, XL, & hemiſphærium KBL, & portionem AKLC, ſectio autem circulus maximus eſto ille cuius diameter KL: & duo coni rectanguli circa axes BD, DE, vertice D communi deſcribantur GDH, MDN, quorum alterius baſis GH communis erit cylindro XH: alterius autem MDN, minor quàm eiuſdem cylindri XH, baſis GH. Denique ſecta

BE bifariam in puncto R, ſecentur BD, in puncto T, & DE, in puncto V, bifariam & ſumatur BO, ipſius BD, pars quarta, necnon EP pars quarta ipſius DE, primum itaque quoniam ER eſt maior, quàm ED, erit punctum R, in ſegmento BD. Quoniam igitur ex ſupra oſtenſis O eſt centrum grauitatis commune cono DGH, & reliquo cylindri KH dempto ABC hemiſphærio: & eadem ratione punctum P, cum ſit centrum grauitatis coni MDN, erit idem centrum grauitatis reliqui ex cylindro XL dempta AKLC portione: eſt autem reliquum cylindri KH dempto KBL hemiſphærio, æquale cono DGH, qua ratione & reliquum cylindri XL, dempta AKLC portione æquale eſt cono MDN; cum igitur S ſit centrum grauitatis totius reliqui ex toto cylindro XH, dempta ABC portione, erit idem S, centrum grauitatis compoſiti ex conis GDH, MDL: ſunt autem horum conorum centra grauitatis O, P; vt igitur conus GDH, ad conum MDN, ita erit PS, ad SO: ſed coni GDH ad ſimilem ipſi conum MDN triplicata eſt proportio axis BD, ad axim BE, hoc eſt cylindri KH ad cylindrum XL; maior igitur proportio erit PS ad SO, quàm cylindri KH ad cylindrum XL, ſed vt cylindrus KH, ad cylindrum XL, ita eſt VR ad RT, ob centra grauiratis V, R, T, maior igitur proportio erit PS ad SO, quàm VR ad RT: ſed eiuſdem PO eſt vt PD ad DO, ita VD ad DT, ob ſectiones axium proportionales; punctum igitur S propinquius eſt puncto O, quàm punctum R, per Lemma. Quare & Stermino B propinquius quàm punctum R: ſed R eſt centrum grauitatis totius cylindri XH: & S reliqui ex cylindro XH dempta ABC portione; igitur Q reliquæ portionis ABC, centrum grauitatis erit in linea ER, atque ideo à puncto B remotius quàm punctnm S. Quod eſt propoſitum.

Manifeſtum eſt autem ex demonſtratione theloremathis, omnis reſidui ex cylindro datæ maiori ſphæræ portioni circumſcripto circa eundem axim portionis, cuius baſis ſit æqualis circulo maximo, centrum grauitatis eſſe in axe abſciſſa primum quarta parte ad verticem portionis terminata ſegmenti axis portionis, quod centro ſphæræ, & vertice portionis, & quarta parte eius quod centro ſphæræ, & baſi portionis terminatur; ad baſim terminata in eo puncto, in quo ſegmentum axis portionis duabus prædictis ſectionibus finitum ſic diuiditur, vt ſegmentum propinquius baſi ſit ad reliquum, vt cubus ſegmenti axis portionis centro ſphæræ, & vertice portionis terminati ad cubum reliqui quod baſim portionis tangit, ſiquidem cubi triplicatam inter ſe habent laterum proportionem, ſimul illud manifeſtum eſt, hoc idem eadem ratione poſſe demonſtrari de centro grauitatis reliqui ex cylindro dempta ſphæræ portione abſciſſa duobus planis paralìelis centrum ſphæræ intercipientibus, ita vt axis portionis à centro ſphæræ in partes inæquales diuidatur, cuius cylindri circumſcripti ſit idem axis, qui & portionis, baſis autem æqualis circulo maximo. Similiter enim deſcriptis duobus conis rectangulis

verticem habentibus communem centrum ſphæræ, baſes autem minores baſibus oppoſitis cylindri circumſcripti: æqualibus circulo maximo, ſumentes pro vertice minorem baſim, pro baſi, maiorem baſim portionis immotis reliquis propoſitum demonſtraremus.

PROPOSITIO XXXVIII.

Omnis maioris portionis ſphæræ centrum gra uitatis eſt in axe primum bifariam ſecto: Deinde ſumpta ad verticem quarta parte ſegmenti axis, quod centro ſphæræ, & portionis vertice finitur: itemque ad baſim quarta parte reliqui ſegmenti inter centrum ſphæræ, & baſim portionis interiecti. Deinde ſegmento axis, inter eas quartas partes interiecto, ita diuiſo, vt pats propinquior baſi ſit ad reliquam vt cubus ſegmenti axis, quod centro ſphæræ, & vertice portionis, ad cubum eius quod centris ſphæræ, & baſis portionis terminatur; in eo puncto, in quo ſegmentum axis centro ſphæræ, & ſectione penultima finitum ſic diuiditur, vt pars prima & penultima ſectione terminata ſit ad totam vltima & penultima ſectione termi natam, vt exceſſus, quo ſegmentum axis portionis inter centrum, & baſim portionis interiectum ſuperat tertiam partem minoris extremæ maiori po ſita dicto axis ſegmento in proportione ſemidia-

metri ſphæræ ad prædictum ſegmentum, vnà cum ſubſeſquialtera reliqui ſegmenti, ad axim portionis.

Sit maior portio ABC ſphæræ, cuius centrum D, diameter KH, axis autem portionis ſit BE, baſis circulus, cuius diameter AC, & ſit axis BE primum bifariam ſectus in puncto G: ſumptaque ipſius BD, quarta parte BP, itemque ipſius DE quarta parte EN, ſecetur interiecta PN, ita in puncto F, vt NF, ad FP, ſit vt cubus ex BD ad cubum ex DE; punctum igitur F, ex præcedenti

[Figure 118]

corollario erit centrum grauitatis reliqui ex cylindro LM portioni ABC, vt in antecedenti circumſcripto. Quoniam igitur & prædicti reſidui, ex antecedenti, & cylindri LM, centra grauitatis ſunt in axe BE, erit & portionis ABC in axe BE centrum grauitatis, quod ſit S: manifeſtum eſt igitur punctum S, cadere ſupra centrum D, in linea BD, minori ablata ſphæræ portione, cuius baſis cir-

culus AC: centrum autem F propinquius eſſe puncto B, quàm centrum S, conſtat ex præcedenti: quare centrum G, totius cylindri LM inter puncta F, S cadet. Dico GF ad FS eſſe vt exceſſus, quo recta DE ſuperat tertiam partem minoris extremæ maiori poſita ipſa DE in propor tione continua ipſius DH ad DE vnà cum ſubſeſquialtera ipſius BD, ad axim BE, ita GF ad FS. Quoniam enim portio ABC ad cylindrum LM eſt vt prædictus exceſſus vnà cum ſubſeſquialtera ipſius BD ad axim BE: & vt portio ABC ad LM cylindrum, ita eſt GF ad FS, ob centra grauitatis F, G; erit vt prædictus exceſſus vna cum ſubſeſquialtera ipſius BD ad axim BE, ita GF ad FS. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XXXIX.

Omnis portionis ſphæræ abſciſſæ duobus planis parallelis centrum intercipientibus, & à centro æqualiter diſtantibus, centrum grauitatis eſt in medio axis, vel idem, quod centrum ſphæræ.

Sit portio ABCD, ſphæræ, cuius centrum G, abſciſsa duobus planis parallelis centrum G intercipientibus, & æquè ab eo diſtantibus: ſectiones erunt circuli minores, quorum diametri ſint AD, BC centra autem F,E, quibus axis portionis termi nabitur, eritque ad plana vtriuſque circuli per

[Figure 119]

pendicularis tranſiens per centrum G: & quia illa plana

à centro G, æquè diſtant, erit EG, æqualis GF. Dico portionis ABCD centrum grauitatis eſſe G. Deſcripta enim figura, vt ſupra fecimus, intelligantur duo coni rectanguli GNO, GPQ, vertice G, communi, axibus autem eorum EG, GF: & cylindrus LM, portioni circumſcriptus circa eundem axim EF, cuius baſis æqualis eſt circulo maximo: & ſumatur EH ipſius EG, pars quarta, itemque FK, pars quarta ipſius FG. Quoniam igitur conorum GNO, PGO, axes FG, GH, ſunt æquales, reliquæ KG, GH, æqua

[Figure 120]

les erunt; centra autem grauitatis conorum ſunt K, H; punctum igitur G eſt centrum grauitatis compoſiti ex duobus conis æqualibus GNO, GPQ, hoc eſt reliqui ex cylindro LM, dempta ABCD, portione, ex ante demonſtratis: ſed idem G eſt centrum grauitatis totius cylindri LM; reliquæ igitur ABCD, portionis centrum grauitatis erit G. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XL.

Omnis portionis ſphæræ abſciſſæ duobus planis parallelis centrum intercipientibus, & à centro non æqualiter diſtantibus centrum grauitatis eſt in axe primum bifariam ſecto: Deinde ſumpta ad minorem baſim portionis quarta parte ſegmenti axis, quod minorem baſim attingit: & ad maio-

rem baſim quarta parte reliqui ſegmenti axis eorum, quæ à centro ſphæræ fiunt: Deinde recta inter has quartas partes interiecta ita diuiſa, vt pars maiori baſi propinquior ſit ad reliquam vt cubus ſegmenti axis inter ſphæræ centrum, & minorem baſim, ad cubum eius, quod inter ſphæræ centrum, & maiorem baſim portionis interijcitur; in eo puncto, in quo ſegmentum axis centro ſphæræ, & penultima ſectione terminatum ſic diuiditur, vt pars quæ penultima, & prima ſectione terminatur ſit ad totam vltima, & penultima ſectione terminatam, vt ad axim portionis eſt exceſſus, quo idem axis portionis ſuperat tertiam partem compoſitæ ex duabus minoribus extremis, maioribus poſitis duobus axis ſegmentis, quæ fiunt à centro ſphæræ in rationibus ſemidiametri ſphæræ ad prædicta ſegmenta.

[Figure 121]

Sit portio ABCD ſphæræ, cuius centrum G, abciſſa duobus planis parallelis centrum G intercipienibus, &

ab eo non æqualiter diſtantibus: & axis portionis ſit EF, qui per centrum G tranſibit, vtpote parallelorum circulorum centra iungens: cumque eorum vtrumque ſit à centro non æqualiter diſtantium perpendicularis, erunt eius ſegmenta EG, GF, inæqualia. Eſto EG, maius: ſectoque axe EF bifariam in puncto P, ſumptisque ipſarum EG, GF, quartis partibus EH, FK, ſecetur interiecta KH, in puncto Q, ita vt KQ, ad QH, ſit vt cubus ex EG, ad cubum ex GF, & portionis ABCD, ſit centrum gra uitatis R: quod quidem cum punctis P, Q, eſſe in axe

[Figure 122]

EF: & cylindro LM, ſuper baſim æqualem circulo maximo circa axim EF, portioni circumſcripto, reliqui eius dempta ABCD, portione centrum grauitatis eſse Q, & propinquius E puncto, quàm centrum grauitatis R portionis ABCD, manifeſtum eſt ex ſupra demonſtratis de maioris portionis ſphæræ centro grauitatis: portionis autem ABCD centrum grauitatis R eſse in ſegmento EG ſequitur ex antecedente. Dico PQ ad QR eſse vt ad axim EF exceſsus, quo axis EF ſuperat tertiam partem compoſitæ duabus minoribus extremis altera reſpondente maiori extrema EG in proportione continua ipſius NG

ad GE, altera maiori extremæ FG in proportione continua ipſius NG ad GF. Quoniam enim ob centra gra uitatis QPR eſt vt QP ad PR, ita portio ABCD ad reliquum cylindri LM, erit componendo, & per conuerſionem rationis, & conuertendo, vt PQ ad QR, ita portio ABCD ad LM cylindrum: ſed portio ABCD ad LM cylindrum eſt vt prædictus exceſſus ad axim EF; vtigitur prædictus exceſſus ad axim EF, ita eſt PQ ad QR. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XLI.

Omnis conoidis parabolici centrum grauitatis eſt punctum illud, in quo axis ſic diuiditur vt pars, quæ eſt ad verticem ſit dupla reliquæ.

Sit conoides parabolicum ABC, cuius vertex B, axis autem BD ſectus in puncto E ita vt EB ſit ipſius ED dupla. Dico E eſse centrum grauitatis conoidis ABC. Nam in ſectione per axim parabola ABC, cuius diameter erit BD, deſcribatur riangulum ABC; ſumptisque ipſius BD æqualibus DH, HO, per puncta H, O, ſecentur vnà parabola & triangulum ABC duabus rectis FGH

[Figure 123]

KL, MNOPQ: & per eas rectas ſecetur conoides ABC planis baſi parallelis, factæ autem ſectiones erunt circuli circa FL, MQ, & in parabola

ABC tres ad diametrum ordinatim applicatæ AD, FH, MO. Quoniam igitur tres rectæ OB, BH, BD ſeſe qualiter excedunt, quarum minima BO, maxima eſt BD, minor erit proportio BO ad BH, quàm BH ad BD; hoc eſt NP ad GK, quàm GKad AC. ſed vt OB ad BH hoc eſt NO ad GH, vel NP ad GK ita eſt quadratum MO ad quadratum FH, hoc eſt eono dis ſectionum circulus MQ ad circulum FL: eademque ratione vt GK ad AC ita circulus FL ad circulum AC; minor igitur proportio erit circuli MQ ad circulum FL quàm

[Figure 124]

circuli FL ad circulum AC. Similiter autem oſtenderemus ternas quaslibet alias ita factas ſectiones trianguli, & parabolæ ABC inter ſe & baſi parallelas proportionales eſse, & minorem proportionem vtrobique minimæ ad mediam, quàm mediæ ad maximam. Sed E eſt centrum grauitatis trianguli ABC, igitur per vigeſimamtertiam huius centrum grauitatis conoidis ABC erit idem E. Quod demonſtrandum erat,

PROPOSITIO XLII.

Omnis fruſti conoidis parabolici centrum gra uitatis axim ita diuidit, vt pars, quæ minorem baſim attingit ſit ad reliquam; vt duplum maioris

baſis vnà cum minori, ad duplum minoris, vnà cum maiori.

Sit conoidis parabolici ABC, cuius axis BD fruſtum AEFC, eius maior baſis circulus, cuius diameter AC, minor, cuius diameter EF: in eadem parabola per axem, axis autem DG, in quo fruſti AEFC ſit centrum grauitatis H. Dico eſſe vt duplum circuli AC, vnà cum circulo EF, ad duplum circuli EF vna cum circulo AC, ita GH, ad HD. Iungantur enim rectæ AKB, BLC. Quoniam igitur qua ratione oſten dimus conoides, & triangulum ABC, commune habere in linea BD centrum grauitatis, eadem prorſus remanet demonſtratum, fruſti

[Figure 125]

AEFC centrum grauitatis H, idem eſse quod trapezij AKFC; erit duarum parallelarum AG, KL vt dupla ipſius AC, vnà cum KL, ad duplam ipſius KL, vnà cum AC ita GH ad HD: ſecat enim DG ipſas AC, KL bifariam. Sed vt AC ad KL ita eſt circulus AC ad circulum EF, ex demonſtratione antecedentis, hoc eſt vt dupla ipſius AC vnà cum KL ad duplam ipſius KL vnà cum AC, ita duplum circuli AC vna cum circulo KL ad duplum circuli KL vnà cum circulo AC; vt igitur eſt duplum circuli AC, vnà cum circulo EF, ad duplum circuli EF, vnà cum circulo AC; ita erit GH ad HD. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XLIII.

Omnis conoidis hyperbolici centrum grauitatis eſt punctum illud, in quo duodecima pars axis ordine quarta ab ea, quæ baſim attingit, ſic diuiditur, vt pars baſi propinquior ſit ad reliquam, vt ſeſquialtera tranſuerſi lateris hyperboles, quæ conoides deſcribit ad axim conoidis.

Sit conoides hyperbolicum ABC, cuius vertex B, axis autem BD, qui etiam erit diameter hyperboles, quæ conoides deſcripſit, ad quam rectæ ordinatim applicantur: eiuſdem autem hyperboles tranſuerſum latus ſit EB, cuius ſit ſeſquialtera BEI, & ſumpta DQ quarta parte axis BD, & DG, eiuſdem tertia, qua ratione erit FG duodecima pars axis BD, & ordine quarta ab ea cuius terminus D, fiat vt IB, ad BD, ita QH, ad HG. Dico conoidis ABC, centrum grauitatis eſſe H. Sumpto enim in linea AD quolibet puncto M, vt eſt EB ad BD longitudine, ita fiat MD, ad DK ipſius AD potentia: & abſcindatur DN, æqualis DM, & DL æqualis DK; ſiue autem ſit DK minor, quàm DM, ſiue maior, ſiue eadem illi; omnibus caſibus communis erit demonſtratio. At per puncta M, N, vertice B, circa diametrum BD, deſcribatur parabola MBN, & triangulum KBL. Manente igitur BD, & circumductis figuris MBN, KBL, deſcribantur conoides parabolicum MBN, & conus KBL, quorum communis axis erit BD, baſes autem circuli, quorum diametri KL, MN, in eodem plano cum baſe conoidis ABC. Rurſus ſecto axe BD bifariam, & ſingulis eius partibus ſemper bifariam in qua-

cumque multiplicatione; ſint duæ partes æquales proximæ baſi DF, FQ: & per puncta FQ duo plana baſium plano parallela tres prædictas figuras ſolidas ſecare intelligantur: ſecabunt autem & tres figuras per axim, eruntque ſectiones rectæ lineæ ad diametrum figurarum ordinatim applicatæ propter plana ſecantia parallela: trium autem ſolidorum ſectiones & baſes omnes circuli, terni in ſingulis planis: ac primi quidem ordinis ſint ij, quorum diametri ſunt baſes trium figurarum per axim, trianguli ſcilicet, parabolæ, & hyperboles, quæ prædictas figuras ſolidas deſcribunt, rectæ lineæ AC, MN, KL. Secundi verò retento eodem ordine figurarum tres αζ, βε, γδ. Tertij denique ordinis SZ, TY, VX.

[Figure 126]

Quoniam igitur eſt vt EB, ad BD, ità quadratum MD, ad quadratum DK, ideſt conus MBN, ſi deſcribatur eodem vertice B, ad conum KBL. Et vt IB, ad BE, ità eſt conoides MBN, ad conum MBN, in proportione ſcili-

cet ſeſquialtera; ex æquali erit vt IB, ad BD, itì conoides MBN ad conum KBL: Sed vt IB, ad BD, ità ponitur QH ad HG; vt igitur conoides MBN, ad conum KBL, ità eſt QH ad HG. Sed Q eſt centrum grauitatis coni KBL, & G conoidis MBN; compoſiti igitur ex conoide MBN, & cono KBL centrum grauitatis erit H. Rurſus quoniam tres rectæ lineæ BD, BF, BQ, æqualibus exceſſibus inter ſe differunt, minor erit proportio BQ, ad BF, quàm BF, ad BD, hoc eſt rectanguli EBQ, ad rectangulum EBF, quàm rectanguli EBF, ad rectangulum EBD. Sed quadrati BQ, ad quadratum BF, duplicata eſt proportio lateris BQ ad latus BF: hoc eſt rectanguli EBQ

[Figure 127]

ad rectangulum EBF: & quadrati BF, ad quadratum BD duplicata eius, quæ eſt rectanguli EBF, ad rectangulum EBD; compoſitis igitur primis cum ſecundis, minor erit proportio rectanguli BQE, ad rectangulum BFE,

quàm rectanguli BFE, ad rectangulum BDE. Sed vt rectangulum BQE ad rectangulum BFE, ita eſt quadratum SQ ad quadratum αF: & vt rectangulum BFE ad rectangulum BDE, ita quadratum αF, ad quadratum AD; minor igitur proportio erit quadrati SQ, ad quadratum αF, quàm quadrati αF ad quadratum AD. Sed vt quadratum SQ ad quadratum αF, ita eſt quadratum SZ ad quadratum α<37>: & vt quadratum αF ad quadratum AD ita quadratum αζ ad quadratum AC; minor igitur proportio erit quadrati SZ ad quadratum αζ, quàm quadrati αζ, ad quadratum AC, hoc eſt circuli SZ ad circulum α<37>, quàm circuli α<37>, ad circulum AC; qui circuli ſunt ſectiones conoidis ABC poſiti vt in propoſitionibus lemmaticis dicebamus. Rurſus quoniam ſunt quatuor primæ proportionales; vt rectangulum DBE ad rectangulum FBE, ita MD quadratum ad quadratum βF: & totidem ſecundæ, vt quadratum BD, ad quadratum BF, ita quadratum DK, ad quadratum Fγ, ob ſimilium triangulorum latera proportionalia: ſed vt EB, ad BD, hoc eſt rectangulum DBE prima in primis ad quadratum BD primam in ſecundis, ita eſt quadratum MD tertia in primis ad quadratum DK tertiam in ſecundis; vt igitur compoſita ex primis ad compoſitam ex ſecundis, ità erit compoſita ex tertijs ad compoſitam ex quartis; videlicet vt rectangulum DBE vnà cum quadrato BD, hoc eſt rectangulum BDE ad rectangulum BFE, hoc eſt vt quadratum AD, ad quadratum αF, ità compoſitum ex quadratis MD, DK, ad compoſitum ex quadratis βF, Fγ: & quadrupla vtrorumque, vt quadratum AC, ad quadratum α<37>, ità compoſitum ex quadratis MN, KL, ad compoſitum ex quadratis βε, γδ; hoc eſt eorum circulorum, qui ſunt ſectiones ſolidorum, vt circulus AC, ad circulum α<37>, ità compoſitum ex circulis MN, KL, ad compoſitum ex circu-

lis βε, γδ. Eadem ratione erit vt circulus AC, ad circulum SZ, ità compoſitum ex circulis MN, KL, ad compoſitum ex circulis TY, VX: & conuertendo, & ex æquali, vt circulus SZ, ad circulum α<37>, ità compoſitum ex circulis TY, VX, ad compoſitum ex circulis βε, γδ: & vt circulus α<37>, ad circulum AC, ità compoſitum ex circulis βε, γδ, ad compoſitum ex circulis MN, K L. Sunt igitur tria compoſita ex binis ſectionibus cir culis, & totidem alij circuli, quos diximus in eadem proportione, ſi bina ſumantur in ſin gulis planis ſecan tibus: eorum autem minor erat proportio circuli SZ ad circulum α<37>, quàm circuli α<37>, ad circulum AC; minor igitur proportio erit conpoſiti ex circulis TΥ, VX, ad conpoſitum ex circu-

[Figure 128]

lis βε, γδ, quàm compoſiti ex circulis βε, γδ, ad com poſitum ex circulis MN, KL. Hac eadem ratione ad verticem deinceps progredienti manifeſtum erit, omnium com-

poſitorum ex binis ſectionibus nempe circulis, quorum alter ad conum KBL pertinet, alter ad conoides MBN, in eodem plano ſecante prædictorum inter ſe parallelorum exiſtentibus, minorem eſſe proportionem incipienti ab eo, quod eſt proximum vertici, primi ad ſecundum, quàm ſecundi ad tertium, & ſecundi ad tertium, quàm tertij ad quartum, & ſic ſemper deinceps vſque ad maximum & vltimum compoſitum ex circulis MN, KL: & eandem dictas ſectiones compoſitas ex coni, & conoidis parabolici ſectionibus inter ſe habere proportionem, quàm habent inter ſe circuli ſectiones conoidis ABC, pro vt illis in ijſdem planis ſecantibus, & æqualia axis BD ſegmenta intercipientibus reſpondent: Igitur per trigeſimam ſecundam huius, & ſequens eam Corollarium, conoides ABC, & compoſitum ex conoide MBN, & cono BKL, commune habebunt in axe BD centrum grauitatis. Sed H erat huius compoſiti centrum grauitatis; Igitur conoidis ABC centrum grauitatis erit idem H. Quod demonſtrandum erat.

COROLLARIV M.

Eadem demonſtratione conſtat ſi prædicta tria ſolida ita vt diximus diſpoſita ſecentur plano baſibus parallelo; fruſtum conoidis hyperbolici, & compoſitum ex fruſtis coni, & conoidis parabolici, commune habere in communi axe centrum grauitatis.

Si conus & conoides parabolicum circa eundem axim ſecentur plano baſi parallelo; fruſti conici abſciſſi maiori baſi propinquius erit quàm parabolici centrum grauitatis.

Sint conus ABC, & conoides parabolicum EBF, quorum communis axis BD, cuius per quoduis punctum M, planum ſecans ea corpora plano baſium, quarum diametri AC, EF, parallelo abſcindat fruſta AKLC, cuius centrum grauitatis N, & EGHF, cuius centrum gra

[Figure 129]

uitatis O, quorum vtrumque erit in communi axe DM. Dico punctum N, propinquius eſse ipſi D quàm punctum O. Quoniam enim eſt parabolicifruſti EGHF centrum grauitatis O; erit vt duplum maioris baſis, ideſt circuli EF vna cum minori circulo GH, ad duplum circuli GH vna cum circulo EF, hoc eſt vt duplum quadrati ED vna cum quadrato ED ita MO ad OD. Sed vt quadratum ED ad quadratum GM in parabola quæ conoides deſcribit, cuius diameter BD, ita eſt DB ad BM, hoc eſt AC ad KL; vt igitur eſt dupla ipſius AC vna cum KL ad duplam ipſius KL vna cum AC ita erit MO ad OD: ſed N eſt fruſti conoici AKLC, centrum grauitatis; punctum igitur N, erit maiori baſi AC propinquius quàm

punctum O; eſt autem O, fruſti EGHF centrum grauitatis. Si igitur conus, & conoides parabolicum circa eundem axim, &c. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XLV.

Omnis fruſti conoidis hyperbolici centrum grauitatis eſt in axe primum ſecto ſecundum centrum grauitatis cuiuſuis fruſti conici circa axem conoidis communi vertice, abſciſſi vnà cum fruſto conoidis: deinde ita vt pars minorem baſim attingens ſit ad reliquam, vt dupla axis conoidis vna cum reliqua dempto axe fruſti, ad duplam eiuſdem reliquæ vna cum axe conoidis: deinde poſitis quatuor rectis lineis binis proportionalibus, potentia primis, ſecundis longitudine, in proportione, quæ eſt inter axem conoidis, & reliquam dempto axe fruſti; ita vt maior primarum ſit media proportionalis inter axem conoidis, & tranſuerſum latus hyperboles, quæ figuram deſcribit, minoris autem potentia ſeſquialtera minor ſecundarum; in eo puncto, in quo ſegmentum axis fruſti dictis duabus ſectionibus terminatum ſic diuiditur, vt pars minori baſi propinquior ſit ad reliquam vt cubus, qui fit ab axe fruſti vnà cum ſolido rectangulo, quod axe conoidis, & reliqua dempto axe fruſti, & tripla axis conoidis continetur, ad ſolidum rectangulum ex eadem reliqua parte conoidis, & eo, quo

plus poteſt quadrato maior quàm minor dicta-
rum ſecundarum.

Sit conoidis hyperbolici ABC, cuius axis BD; &
tranſuerſum latus hyperboles, quæ figuram deſcribit EB,
fruſtum ALMC abſciſſum vnà cum axe FD: cuius

[Figure 130]

baſes oppoſitæ, maior circulus circa AC, minor circa LM:
ſecto autem axe FD primum ſecundum G centrum gra-
uitatis fruſti abſciſſi vnà cum fruſto ALMC à quouis co
no, cuius axis BD, & vertex B, deinde in puncto H ita
vt FH ad HD ſit vt dupla ipſius BD vnà cum BF ad
duplam ipſius BF vnà cum BD, quo facto cadet G
punctum infra punctum H, ponantur vt DB ad BF,

ita N ad O potentia, & Q ad P longitudine: ſit autem N media proportionalis inter EB, BD, at P ipſius O potentia ſeſquialtera: quo autem Q plus poteſt quàm P ſit quadratum ex R: & vt cubus ex FD vna cum ſolido rectangulo ex BF, FD, & tripla ipſius BD, ad ſolidum rectangulum ex BF, & quadrato R, ita ſit HK ad KG. Dico fruſti ALMC centrum grauitatis eſſe K. Producta enim quà opus eſt diametro AC ipſi BD æquales abſcindantur DS, DV: necnon ipſi N æquales DT, DX, vt ſit TD ad DS potentia, vt EB, ad BD longitudine, & deſcribantur conoides parabolicum TBX, & conus SBV, quorum vertex communis B, axis BD: ſectis autem his tribus ſolidis plano per axim, ſint ſectiones hyperbole ABC, & parabola TBX, & triangulum SBV, quæ figuras deſcribunt; quas planum baſis fruſti propoſiti circa LM ſecans vnà cum tribus ſolidis faciat cum parabola TBX rectam Iγ, & cum triangulo SBV rectam ϒZ: conoidis autem TBX, & coni SBV ſectiones circulos circa Iγ, YZ baſibus, circa SV, TX parallelos; vt ſint conoidis TBX fruſtum TIγX, & coni SBV fruſtum SYZV. Rurſus producta I. M, ponatur <37>F, æqualis Q, & abſcindatur Fδ, potentia ſeſquialtera ipſius IF, iunctisque IB, Bδ, B<37>, deſcribantur tres coni <37>Bθ, δBε, IBγ, quorum omnium baſes nempe circuli erunt in dicto plano ſecante tria ſolida per punctum F. Quoniam igitur circuli inter ſe ſunt vt quæ fiunt à diametris, vel à ſemidiametris quadrata, coni autem eiuſdem altitudinis inter ſe vt baſes; erit vt δF ad FI potentia, ita conus δBε ad conum IBγ; ſeſquialter igitur conus δBε coni IBγ: ſed & conoides parabolicum IBγ ſeſquialterum eſt coni IBγ; æqualis igitur eſt conus δBε conoidi IBγ. Et quoniam in parabola TBX ordinatim ad diametrum applicatarum DT eſt ad FI hoc eſt N

ad O potentia, vt DB ad BF longitudine: ſed TD eſt
æqualis N; ergo & IF æqualis erit O: cum igitur &
P ipſius O, & δF ipſius FI ſit potentia ſeſquialtera, erit
Fδ æqualis ipſi P: ſed F<37> eſt æqualis ipſi que vt igitur eſt
Q ad P, hoc eſt DB ad BF, ita erit <37>F ad Fδ; dupli-
cata igitur proportio erit quadrati ex F<37> ad quadratum ex
Eδ eius, quæ eſt DB ad BF: ſed vt quadratum ex F<37> ad

[Figure 131]

quadratum ex Fδ, ita eſt circulus circa <37>θ ad circulum
circa δε, hoc eſt conus <37>Bθ ad conum δBε; coni igitur
<37>Bθ ad conum δBε, duplicata eſt proportio eius, quæ eſt
DB ad BF: ſed & conoidis TBX ad conoides IBγ du-
plicata eſt proportio eius, quæ eſt DB ad BF, vt mon-
ſtrant alij; eadem igitur proportio eſt coni <37>Bθ ad co-
num δBε quæ conoidis TBX ad conoides IBγ: ſed

conus δBε æqualis eſt conoidi IBγ, vtpote inſcripti co-
ni IBγ ſeſquialtero, cuius itidem ſeſquialter erat conus
δBε; reliquum igitur coni <37>Bθ dempto cono δBε æqua-
le erit conoidis TBX fruſto TIγX. Rurſus quia eſt vt
cubus ex BD ad cubum ex BI ita conus SBV ad ſui ſi-
milem conum YBZ, in triplicata ſcilicet proportione la-
terum, ſiue axium DB, BF: ſed quia YF eſt æqualis BF,
propter ſimilitudinem triangulorum, eſt vt cubus ex BF ad
ſolidum ex BF & quadrato ex Fδ, ita quadratum ex FY
ad quadratum ex Fδ, hoc eſt circulus circa YZ ad circulum
circa δε, hoc eſt conus YBZ ad conum δBε ex æquali
igitur erit vt cubus ex BD ad ſolidum ex BF, & quadra-
to Fδ, ita conus SBV ad conum δBε: ſed vt ſolidum
ex BF, & quadrato Fδ, ad ſolidum ex BF & quadrato
F<37>, ita eſt ſimiliter vt ante conus δBε ad conum <37>Bθ; ex
æquali igitur erit vt cubus ex BD ad ſolidum ex BF, &
quadrato F<37>, ita conus SBV, ad conum <37>Bθ: ſed con-
uertendo, & per conuerſionem rationis, eſt vt ſolidum ex
BF, & quadrato F<37>, ad ſolidum ex BF, & quadrato,
quo plus poteſt F<37> quàm Fδ, ita conus <37>Bθ ad ſui reli-
quum dempto cono <35>Bε; ex æquali igitur, vt cubus ex
BD ad ſolidum ex BF & quadrato, quo plus poteſt F<37>,
quàm Fδ, hoc eſt, quo plus poteſt Q quàm P quadrato
ex R, ita erit conus SBV, ad reliquum coni <37>Bθ dem-
pto cono δBε, hoc eſt ad fruſtum TIγX. Rurſus, quo-
niam duo cubi ex BF, FD, & ſolidum ex BF, FD, &
tripla ipſius BD, ſunt æqualia cubo ex BD; erit id quo
plus poteſt cubice recta BD quàm BF, cubus ex
FD, & ſolidum ex BF, FD, & tripla ipſius BD: cum
igitur ſit vt cubus ex BD ad cubum ex BF, ita conus
SBV ad conum YBZ; erit per conuerſionem rationis, &
conuertendo, vt cubus ex FD vna cum ſolido ex BF,
FD, & tripla ipſius BD ad cubum ex BD, ita fruſtum
SYZV, ad conum SBV: ſed cubus ex BD, ad ſoli-

dum ex BF & quadrato R, ita erat conus SBV ad fruſtum TIγX: ex æquali igitur, erit vt cubus ex FD vna cum ſolido ex BF, FD, & tripla ipſius BD, ad ſolidum ex BF, & quadrato R, hoc eſt vt HK ad KG, ita ex contraria parte fruſtum SYZV, ad fruſtum TIγX: nam fruſti SYZV eſt centrum grauitatis G: fruſti autem TI

[Figure 132]

γX centrum grauitatis H; totius igitur compoſiti ex his duobus fruſtis centrum grauitatis erit K: commune autem eſt centrum grauitatis compoſiti ex duobus fruſtis SYZV & TIγX, fruſto ALMC per antepenultimæ huius corollarium; fruſti igitur ALMC, centrum grauitatis erit K. Quod demonſtrandum erat.

COROLLARIVM.

Ex omnibus demonſtrationibus eorum, quæ in hoc ſecundo libro propoſuimus, manifeſtum eſt omnium ſupra dictorum corporum centra grauitatis inuenire: quæ cum que enim in modum theorematis propoſuimus, eadem tanquam problemata proponi, & ijſdem demonſtrationibus abſolui poſſunt.

Idem dico de ijs, quæ in primo, & tertio ſequenti libro demonſtrauimus. Porro autem multa lemmata inſtituto præcipuo neceſſaria, & alia addita inuentio ſatis iucunda centri grauitatis conoidis, & portionis conoidis parabolici, & hyperbolici, & fruſti vtriuſque ne ſecundus hic liber nimis longus, & confuſus exiſteret, tertium requirebant. Quem quidem meorum ſtudiorum autumnalium fructum Anni à partu Virginis MDCIII. cum SS. Clementis Pont. Max. auctoritate, & Petri eius Nepotis Cardinalis ampliſſimi Aldobrandini iuſſu bene de me merentium Mathematicam ſcientiam, & Philoſophiam ciuilem in almo Vrbis Gymnaſio profiterer, in eorum gratiam compoſui, qui me centra grauitatis portionum ſphæroidis imperfecti operis crimine condemnandum omittere nolebant; cuius prouinciæ iuuante Deo, & mira Mathematicæ ſtudioſis ſatisfaciendi voluntate, multas difficultates ita ſuperaui, vt vno menſe Octobri plus præſtiterim, quam à me requiſiſſent. ſiquidem quæ de ſphæræ portionibus in hoc libro proprijs eius figuræ rationibus, eadem in ſequenti aliis communibus cuilibet portioni ſphæræ, & ſphæroidis tum lati, tum oblongi abſciſſæ vno, vel duobus planis æque inter ſe diſtantibus, & vtcumque in figuram in cideu-

tibus demonſtraui, & temporis breuitatem magna animi in-
tentione compenſaui, quòd facere non potuiſsem niſi illi,
quos ſupra nominaui meos patronos tranquillum otium
mihi ſua benignitate peperiſſent; ego autem quoſdam ad-
uerſos flatus vehementes in meam vtilitatem verte-
re didiciſsem, cuius rei monumentum flammæ
vento agitatæ ſimulacrum cum illo Ver-
gilij HOC ACRIOR in fronte
operis poſui, vt meus qualiſ-
cumque hic labor vel ab
inuitis in me collati
bencficij memo-
riam præſe-
ferret.

SECVNDI LIBRI FINIS.

[Figure 133]

[Figure 134]

**L V C AE
VALER II
DE CENTRO
GRAVITATIS
SOLIDORVM
LIBER TERTIVS.**

[Figure 135]

PROPOSITIO I.

Si recta linea ſecta fuerit bifariam, & non bifariam; rectangulum partibus in æqualibus contentum æquale eſt rectangulo, quod bis fit ex dimidiæ ſectæ ſegmentis, vna cum quadrato non intermedij eorundem ſegmentorum.

Sit recta linea AB ſecta in puncto C biſariam, & non bifariam in puncto D. Dico rectangulum ADB æquale eſſe rectangulo BDC bis vnà cum quadrato BD. Quoniam enim rectangulum ADB, æquale eſt duobus rectangulis, & ex BD, DC, & ex AC, BD, hoc eſt ex CB, BD: ſed rectangulum ex CB, BD, eſt rectangulum ex BD, DC, vnà cum quadrato BD; rectangulum igitur ex AD, DB, æquale eſt duobus rectangulis ex BD, DC, vnà cum quadiato BD. Si igitur recta linea ſecta fuerit bifariam, & non bifariam, &c. Quod demonſtrandum erat.

[Figure 136]

PROPOSITIO II.

Si circulum, vel ellipſim duæ rectæ lineæ tangentes in terminis coniugatarum diametrorum, conueniant: & punctum in quo conueniunt, & centrum figuræ iungantur recta linea; quæcunque hanc vnà cum prædictæ figuræ termino alterutri diametrorum parallela ſecuerit recta linea, ita ipſa ſecabitur in duobus punctis, vt rectangulum bis contentum ſegmentis, quorum alterum inter diametrum, & terminum figuræ, alterum inter figuræ terminum & contingentem interijcitur, vnà cum huius quadrato, ſit æquale quadrato reliqui ſegmenti inter diametrum, &

cum quæ tangentium concurſum, & centrum figuræ iungit interiecta.

Sit circulus, vel ellipſis ABCD, cuius diametri coniugatæ AC, BED, & figuram tangentes BF, GF, con ueniant in puncto F; (parallelæ enim erunt vtraque alteri coniugatorum diametrorum:) & recta FE iungatur, & ex quolibet puncto G, in recta BE ducatur ipſi AC parallela GLKH. Dico rectangulum GKH bis vnà cum quadrato KH æquale eſſe quadrato GL. Quoniam enim rectangulum BGD æquale eſt rectangulo BGE

[Figure 137]

bis vnà cum quadrato BG: & rectangulum BED, eſt quadratum BE, erit vt rectangulum BED, ad rectangulum BGD, ita quadratum BE, ad rectangulum BGE bis, vnà cum quadrato BG: ſed vt rectangulum BED, ad rectangulum BGD, ita eſt quadratum EC, hoc eſt quadratum GH ad quadratum GK, ex primo conicorum, vt igitur eſt quadratum BE ad rectangulum BGE bis, vnà cum quadrato BG, ita erit quadratum GH ad quadratum GK. Rurſus quia eſt vt BE ad EG, ita BF ad GL, propter ſimilitudinem triangulorum; erit vt quadratum BE ad quadratum EG, ita quadratum

BF hoc eſt quadratum GH ad quadratum GL: & per conuerſionem rationis, vt quadratum BE ad rectangulum BGE bis, vnà cum quadrato BG, ita quadratum GH ad rectangulum GLH bis, vnà cum quadrato LH: ſed vt quadratum BE ad rectangulum EGB bis, vnà cum quadrato BG, ita erat quadratum GH ad quadratum GK; vt igitur quadratum GH ad quadratum GK, ita erit idem quadratum GH ad rectangulum GLH bis, vnà cum quadrato LH: quadratum igitur GK æquale erit rectangulo GLH bis, vnà cum quadrato LH; demptis igitur ab eodem quadrato GH æqualibus quadrato GK, & rectangulo GLH bis, vnà cum quadrato LH, erit rectangulum GKH, bis vnà cum quadrato KH æquale quadrato GL. Quod demonſtrandum erat.

[Figure 138]

PROPOSITIO III.

Per data duo puncta in duabus rectis lineis datum angulum continentibus, in earum plano parabola tranſibit, cuius vertex ſit aſſignatum prædictorum punctorum, in quo altera linea parabo-

lam contingat, altera in altero ſecet diametro æquidiſtans.

Sint data duo puncta. A, C, in duabus rectis lincis datum angulum ABC continentibus, ſit autem aſſignatum punctum C. Dico per puncta A, C, parabolam tranſire, ita vt ipſam linea AC contingat in C puncto, altera autem AB ſecet in puncto A, diametro parabolæ æquidiſtans. Completo enim parallelogrammo BD, ad rectam CD applicetur rectangulum æquale quadrato AD, faciens latitudinem E. Quoniam igitur in plano BD parabola inueniri poteſt, cuius ſit vertex C, diameter CD, ita vt quædam ex ſectione ad diametrum CD applicata in dato angulo ABC, ideſt ADC, qualis eſt recta AD, poſſit rectangulum ex CD, & E, ex primo conicorum elemento; ſit ea ſectio parabola

[Figure 139]

AC; aſſignatum eſt autem punctum C; per puncta igitur A, C parabola AC tranſibit, cuius vertex eſt aſſignatum punctum C. Et quoniam quæ ex vertice recta CB eſt applicatæ DA parallela, ſectionem AC in puncto C continget: eſt autem AB diametro CD æquidiſtans, ac proinde parabolam ſecabit in puncto A. Manifeſtum eſt igitur propoſitum,

PROPOSITIO IV.

Si recta linea parabolam contingat, omnes rectælineæ ex ſectione ad contingentem applicatæ

diametro ſectionis parallelæ inter ſe ſunt longitudine, vt inter applicatas & contactum, vel verticem interiectæ inter ſe potentia. Productis autem dictis applicatis, erunt inter ſectionem & baſim interiectæ inter ſe longitudine, vt in circulo, vel ellipſe ad diametrum ordinatim applicatæ, ſecantesque illam in eaſdem rationes, in quas aliæ prædictæ applicatæ ſecant baſim parabolæ, inter ſe potentia.

Sit ſectio parabola ABC, cuius vertex B, diameter BD: & recta quadam BE ſectionem contingente in puncto B, ſint quotcumque rectæ lineæ ex ſectione ordinatim ad BE contingentem applicatæ diametro BD ſectionis parallelæ FG, KH, quibus productis ſint ad baſim ſe-

[Figure 140]

ctionis applicatæ GN, KO. Et expoſito primum circulo, PQRS, cuius diametri ad rectos inter ſe angulos ſint QS, PR; ſecta autem QT in punctis V, X, in eaſdem rationes, in quas ſecta eſt AD in punctis N, O, ſumpto ordine à punctis D, T, vt ſit DO ad ON,

vt eſt TV ad VX: & vt ON ad NA, ita VX ad Xque applicentur ad ſemidiametrum QT rectæ ZV, XY diametro PR æquidiſtantes. Dico eſſe HK ad FG longitudine, vt FB ad BH potentia: & KO ad GN longitudine, vt ZY ad YX potentia. Iungantur enim KL, GM, baſi AC parallelæ. Quoniam igitur eſt vt MB ad BI. longitudine, ita GM ad KL potentia: ſed MB eſt æqualis ipſi FG, & BL ipſi KH, & BF ipſi GM, & BH ipſi KL in parallelogrammis BG, BK; vt igitur FG ad KH longitudine, ita erit BH ad BF potentia: ſimiliter quotcumque plures eſſent applicatæ idem oſtenderemus. Rurſus, quoniam eſt vt EA, hoc eſt FN ad FG, ita quadratum EB ad BF quadratum, hoc eſt quadratum AD ad quadratum DN, hoc eſt ita quadratum QT, hoc eſt quadratum TY, hoc eſt duo quadrata TX, XY, ad quadratum TX; erit per conuerſionem rationis, vt FN, hoc eſt BD ad GN, ita duo quadrata TX, XϒΤ ſimul, hoc eſt quadratum TY, hoc eſt quadratum TP, ad quadratum XY. Similiter oſtenderemus eſſe vt BD ad OK, ita quadratum PT ad quadratum VZ. Conuertendo igitur erit vt OK ad BD, ita quadratum XY ad PT quadratum: & ex æquali vt OK ad GN, ita quadratum VZ ad quadratum XY. Suntigitur tres rectæ lineæ BD, OK, GN, inter ſe longitudine, vt in circulo PQSR totidem PT, ZV, XY inter ſe potentia, prout inter ſe reſpondent. Idem autem ſimiliter oſtenderemus de quotcumque aliis in circulo, & ſectione parabola vt prædictæ applicatis multitudine æqualibus. In ellipſe autem, ductis diametris quibuſuis coniugatis, & totidem quot in circulo ad vnam ſemidiametrum rectis lineis ordinatim applicatis ſecundum puncta ſectionum eiuſdem diametri in eaſdem prædictas rationes, eodemque ordine; quoniam ex XXI primi conicorum ſtatim apparet rectarum linearum ita vt diximus in circulo, & ellipſe appli-

catarum quadrata eſſe inter ſe in eadem proportione; erunt prædictæ inter ſectionem parabolam, & baſim interiectæ inter ſe longitudine, vt in ellipſe ad diametrum ſimiliter vt diximus applicatæ inter ſe potentia. Manifeſtum eſt igitur propoſitum.

PROPOSITIO V.

Omnis figuræ circa axim in alteram partem deficientis, cuius ſuperficies, excepta baſe ſit tota interius concaua baſim habentis circulum, vel ellipſim; quælibet tres ſectiones baſi parallelæ æqualia axis ſegmenta intercipientes, ita ſe habent, vt minor ſit proportio minimæ ad mediam, quam mediæ ad maximam.

Sit figura ABC circa axem BD in alteram partem deficiens, qualem diximus: & poſitis in axe BD tribus quibuslibet punctis F, E, L, æqualia axis ſegmenta intercipientibus, intelligatur ſolidum ABC ſectum per ea puncta planis buibuſdam baſi circulo, vel ellipſi, circa AC parallelis: quare ſectiones erunt cir-

[Figure 141]

culi, vel ellipſes ſimiles baſi, per definitionem, quarum diametri eiuſdem rationis in eodem plano per axim ſint IK.

GH, MN. Dico ſolidi ABC ſectionum, minorem eſſe proportionem, ipſius IK ad GH, quàm GH ad MN. Iunctis enim MRS, KSN; quoniam tres rectæ IK, RS, MN, ſeſe æqualiter excedunt in trapezio KM; minor erit proportio IK ad RS, quàm RS ad MN: ſed circuli, & ſimiles ellipſes duplicatam habent inter ſe proportionem diametrorum eiuſdem rationis; trium igitur prædictarum ſolidi ABC ſectionum minor erit proportio IK ad RS quàm RS ad MN: ſed maior eſt proportio circuli, vel ellipſis GH ad circulum, vel ellipſim MN, quàm circuli, vel ellipſis RS, ad circulum, vel ellipſim MN; multo ergo minor proportio erit circuli, vel ellipſis IK ad circulum, vel ellipſim RS, quàm circuli, vel ellipſis GH ad circulum, vel ellipſim MN: ſed minor eſt proportio circuli vel ellipſis IK ad circulum, vel ellipſim GH, quàm eiuſdem circuli, vel ellipſis IK ad circulum, vel ellipſim RS; multo ergo minor proportio erit circuli, vel ellipſis IK ad circulum, vel ellipſim GH quàm circuli, vel ellipſis GH ad circulum, vel ellipſim MN. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO VI.

Si ſphæroides ſecetur plano vtcumque præter quàm ad axem, circa quem ſphæroides deſcribitur erecto nam tunc circulus fit. ſectio ellipſis erit: ſimilis autem ipſi alia quæcumque ſectio ſphæroidis eidem parallela: earumque omnes diametri quæ eiuſdem ſunt rationis erunt in eodem plano per axem.

Extant hæc demonſtrata ab Archimede in ſuo de ſphæroidibus, & conoidibus.

PROPOSITIO VII.

Si conoides parabolicum, vel hyperbolicum ſecetur plano vtcumque ad axim inclinato, ſectio ellipſis erit: ſimilis autem ipſi alia quæcumque ſectio conoidis eidem parallela: eruntque earum omnes diametri, quæ eiuſdem ſunt rationis in eodem plano per axem.

Manifeſta ſunt hæc ex ijs, quæ Federicus Commandinus demonſtrauit de ſectionibus horum ſolidorum, in ſuis commentariis in eundem Archimedis librum de ſphæroidibus, & conoidibus: quemadmodum & ſphæroidis, & conoidis vtriuſque ſectionem factam à plano ad axim erecto eſſe circulum.

PROPOSITIO VIII.

Super datam ellipſim, circa datam rectam lineam ab eius centro eleuatam tanquam axem, coni, & cylindri portionem inuenire. Datoque ſphæroidi, & conoidi, vel conoidis, ſphæroidiſve portioni circa datum axem ſphæroidis, vel cuiuslibet dictarum portionum, cylindrus vel cylindri portio circumſcripta eſſe poteſt: vel comprehendere inter eadem plana parallela, ita vt eius baſis ſit ſimilis baſi, vel baſibus comprehenſæ portionis, vel fruſti, ſi de conoidibus ſit ſermo: & diametri, quæ eiuſdem ſunt rationis ſectæ à centro bifariam ſint in eadem recta linea.

Manifeſta item ſunt hæc omnia, ex ijs, quæ in eodem libro de ſphæroidibus, & conoidibus demonſtrat Archimedes.

PROPOSITIO IX.

Omnis fruſti pyramidis triangulam baſim habentis ad priſtina, cuius baſis eſt maior baſis fruſti, & eadem altitudo, cam habet proportionem, quàm rectangulum contentum duobus lateribus homologis baſium oppoſitarum, vnà cum tertia parte quadrati differentiæ dictorum laterum, ad maioris lateris quadratum. Ad pyramidem autem, cuius baſis eſt maior baſis fruſti, & eadem altitudo, vt prædictum rectangulum, vna cum prædicti quadrati tertia parte, ad tertiam partem quadrati maioris lateris.

Sit pyramidis triangulam baſim habentis fruſtum AB CD EF: laterum autem homologorum AB, DE, triangulorum ſimilium oppoſitorum ABC, D EF, ſit differentia DG: & eiuſdem altitudinis fruſto ſit priſma DEFCHK: & pyramis intelligatur ADEF. Dico fruſtum BDF ad priſma HKF, eſſe vt rectangulum DEG vna cum tertia parte quadrati DG. Ad quadratum DE: ad pyramidem autem ADEF, vt prædictum rectan-

[Figure 142]

gulum DEG, vnà cum tertia parte quadrati DG, ad ter-

tiam partem quadrati DE. Abſciſsis enim æqualibus EL ipſi BC, & FM ipſi AC, & EG, ipſi AB, conſtituantur priſmata ABCLEG, AGMFCL, ANHDGM, & pyramis ADGM, & iungatur ML. Quoniam igitur ob parallelas EF, GM, & DF, GL, ſimilia inter ſe ſunt triangula DEF, DGM, EGL, duplicatam inter ſe habebunt laterum ho mologorum DE, DG, GE, proportionem, hoc eſt eandem, quæ totidem eſt quadratorum ex ipſis DE, DG, GE, prout inter ſe reſpondent: vt igitur DG quadratum ad quadratum DE, ita eſt triangulum DGM ad triangulum DEF: eademque ratione vt quadratum GE ad DE quadratum, ita trian gulum EGL ad triangulum D EF: & vt prima cum quinta ad ſecundam, ita tertia cum ſexta ad quartam: videlicet, vt duo quadrata DG, GE, ad quadratum DE, ita duo triangula DGM, EGL, ad triangulum DEF. & conuertendo, & per conuerſionem rationis, vt quadratum DE ad rectangulum DGE bis, ita triangulum DEF, ad parallelogram-

[Figure 143]

mum GF: & conuertendo, vt rectangulum DGE bis, ad quadratum DE, ita GF parallelogrammum ad triangulum DEF: & antecedentium dimidia, vt rectangulum DGE ad quadratum DE, ita triangulum GML ad triangulum DEF; hoc eſt priſma, cuius baſis triangulum GLM, altitudo eadem priſmati HKF ad priſma HKF.

Rurſus, quoniam eſt vt quadratum EG ad quadratum ED, ita triangulum EGL ad triangulum DEF; erit ſimiliter vt quadratum EG ad quadratum ED, ita priſma BGL ad priſma HKF: ſed vt rectangulum DGE ad quadratum DE, ita priſma erat, cuius baſis triangulum G

LM altitudo autem eadem priſmati HKF, hoc eſt priſma ACGLFM illi æquale per vltimam XI. elem. ad priſma HKF: vt igitur prima cum quinta, rectangulum DGE vna cum quadrato EG, hoc eſt rectangulum DEG, ad ſecundam quadratum DE, ita erit tertia cum ſexta, duo priſmata BGL, ACGLFM, ad quartam priſma HKF. Præterea quoniam vt quadratum DG ad quadratum DE, ita erat triangulum DGM ad triangulum DEF: ſed vt triangulum DGM ad triangulum DEF, ita eſt priſma, HGM, ad priſma HKF: & tertiæ antecedentium partes, videlicet, vt tertia pars quadrati DG, ad quadratum DE, ita pyramis ADGM ad priſma HKF: ſed vt rectangulum DEG ad DE quadratum, ita erant duo priſmata BGL, ACGLFM, ad priſma HKF; vt igitur prima cum quinta, rectangulum DEG vna cum tertia parte DG quadrati, ad quadratum GD ſecundam, ita erit tertia cum ſexta, duo priſmata BGL, ACGLFM vna cum pyramide ADGM, hoc eſt integrum fruſtum ABCDEF ad priſma HKF quartam. Ex hoc patet ſecunda pars propoſiti. Quoniam enim eſt vt rectangulum DEG, vna cum tertia parte quadrati DG, ad quadratum DE, ita fruſtum ABGDEF ad priſma HKF: vt autem quadratum DE, ad tertiam ſui partem, ita eſt priſma HKF ad pyramidem, cuius baſis triangulum DEF, altitudo eadem priſmati HKF; erit ex æquali vt rectangulum DEG vna cum tertia parte quadrati DG ad tertiam partem quadrati DE, ita fruſtum ABCDEF, ad pyramidem ſi compleatur ADEF. Manifeſtum eſt igitur propoſitum.

COROLLARIVM.

Hinc manifeſtum eſt eadem demonſtratione, qua vtimur ad propoſitionem XXXVI. primilibri; fruſtum cuiuslibet pyramidis baſim habentis pluribus quàm tribus lateribus contentam, ad priſma, ſeu pyramidem, cuius baſis eſt eadem quæ maior baſis fruſti, & eadem altitudo: & reliquum ipſius priſmatis dempto fruſto, ad ipſum priſma, eas habere rationes, quæ à baſium fruſti oppoſitarum homologis lateribus eorumque differentia deriuantur eo modo, quo in præcedenti theoremate dicebamus.

PROPOSITIO X.

Omne fruſtum coni, vel portionis conicæ, ad cylindrum, vel cylindri portionem, cuius baſis eſt eadem, quæ maior baſis fruſti, & eadem altitudo, eam habet proportionem, quàm rectangulum contentum baſium diametris eiuſdem rationis, vnà eum tertia parte quadrati differentiæ earumdem diametrorum, ad maioris baſis quadratum. Ad conum autem, vel coni portionem, cuius baſis eſt eadem, quæ maior baſis fruſti, & eadem altitudo; vt prædictum rectangulum, vnà cum prædicti quadrati tertia parte, ad tertiam partem quadrati ex diametro maioris baſis. Prædicti autem cylindri,

vel portionis cylindricæ reſiduum dempto fruſto, ad totum cylindrum, vel cylindri portionem; vt rectangulum contentum diametro minoris baſis fruſti, & differentia diametri maioris, vnà cum duabus tertiis quadrati differentiæ, ad quadratum diametri maioris baſis.

Sit coni, vel eius portionis fruſtum ABCD, cuius baſes oppoſitæ, circuli vel ſimiles ellipſes, quarum diametri minoris baſis AB cuius centrum E: maioris autem CD, & ſuper baſim circulum, vel ellipſim CD ſtet cylindrus, vel portio cylindrica CG comprehendens fruſtum AB CD, eiuſdemque altitudinis cum ipſo, & conus, vel coni portio ECD. quo autem AC diameter ſuperat diametrum AB, quæ differentia dicitur, ſit DF. Dico fruſtum AD ad cylindrum, vel portionem cylindricam CG, eſſe vt rectangulum DCF vnà cum tertia parte quadrati DF, ad quadratum CD. Ad conum autem vel coni portionem ECD, vt rectangulum DCF, vna cum tertia parte quadrati DF, ad tertiam partem quadrati CD. Cylindri autem, vel cylindri portionis CG reſiduum dempto fru-

[Figure 144]

ſto AD, ad cylindrum, vel portionem cylindricam CG, vt rectangulum CFD vna cum duabus tertiis quadrati FD, ad quadratum CD. Cono enim, vel portioni conicæ, cuius fruſtum AD, & cylindro, vel portioni cylindricæ, cuius baſis eſt circulus, vel ellipſis CD, altitudo autem eadem completo cono, vel portioni conicæ iam dictæ, illi pyramis, huic priſma inſcripta intelligantur, quorum

communis baſis ſit poly gorum inſcriptum circulo quidem æquilaterum, & æquiangulum; in ellipſe autem, quod pro Archimede deſcribit Commandinus, ita vt & à cylindro, vel cylindri portione priſina, & à cono, vel coni portione pyramis deficiat minori ſpacio quantacumque magnitudine propoſita: quo modo autem in portione cylindrica, vel conica hoc fieri poſſit, eadem quæ de cono atque cylindro Euclides in duodecimo docuit manifeſtant. Abſciſſione igitur facta fruſti AD, & cylindri, vel portionis cylindricæ CG, abſciſſa ſimul erunt fruſtum pyramidis inſcriptum fruſto AD, & priſma inſcriptum cylindro, vel portioni cylindricæ CG, eiuſdem altitudinis inter ſe, & duobus prædictis ſolidis AD, CG, deficien tia vnum à fruſto, alterum à cylindro, vel portione cylindrica multo minori ſpacio magnitudine propoſita: ſectiones autem priſma tis, & pyramidis erunt polygona circulis, vel ellipſibus ipſi CD op poſitis & ſimilibus inſcripta inter ſe ſimilia, vt multi oſtendunt. erunt etiam ſimilium polygonorum circulis, vel ellipſibus ſimilibus, quæ ſunt baſes oppoſitæ fru-

[Figure 145]

ſti AD, inſcriptorum diametri eædem AB, CD. Quoniam igitur ſimilium polygonorum circulis, & ſimilibus ellipſibus inſcriptorum latera homologa inter ſe ſunt vt diametri dictorum circulorum, vel ellipſium, eadem erit proportio inter duas diametros AB, CD, hoc eſt FC, CD, quæ inter duo quælibet latera homologa polyganorum circulis, vel ellipſibus ſimilibus AB, CD inſcriptorum. Sed pyramidis fruſtum fruſto CB inſcriptum ad priſma, cuius baſis eſt maior baſis fruſti pyramidis, & eadem altitudo, ſolido CG inſcriptum, eſt vt re-

ctangulum contentum lateribus homologis baſium oppo-
ſitarum, vna cum tertia parte quadrati differentiæ, ad ma-
ioris lateris quadratum; idem igitur fruſtum pyramidis
ad idem priſma, erit vt rectangulum DCF, vna cum
tertia parte quadrati DF ad quadratum CD: deficit
autem vtrumque & pyramidis fruſtum fruſto CB inſcri-
ptum ab ipſo CB fruſto, & priſma ipſi CG inſcriptum
ab ìpſo CG, minori ſpacio quantacumque propoſita ma-
gnitudine; per tertiam igitur huius, erit vt rectangulum
DCF vna cum tertia parte quadrati DF, ad CD qua-
dratum, ita fruſtum CB ad cylindrum, vel portionem
cylindricam CG. Cum igitur conus, vel coni portio E
CD ſit pars tertia cylindri, vel portionis cylindricæ CG,
erit ex æquali, vt idem rectangulum DCF, vna cum ter-
tia parte quadrati DF, ad tertiam partem quadrati CD,
ita fruſtum BC, ad conum vel coni portionem ECD. Præ-
terea, quia quadratum CD æquale eſt duobus quadratis
ex CF, FD, vna cum rectangulo bis ex CF, FD: quorum
rectangulo CFD, vna cum quadrato CF æquale eſt rectan-
gulum DCF; erit quadratum CD æquale rectangulo
DCF vna cum quadrato DF; demptis igitur rectangu-
lo DCF, & tertia parte quadrati DF; quod remanet
CD quadrati erit rectangulum CFD vna cum duabus
tertiis quadrati DF. quoniam igitur eſt conuertendo vt
quadratum CD ad rectangulum DCF, vna cum tertia
parte quadrati DF, ita cylindris, vel portio cylindrica
CG ad fruſtum CB, erit per conuerſionem rationis, &
conuertendo; vt rectangulum CFD vna cum duabus ter-
tiis DF quadrati, ad quadratum CD, ita reliquum cy-
lindri, vel portionis cylindricæ CG dempto fruſto CB,
ad cylindrum, vel portionem cylindricam. Manifeſtum
eſt igitur propoſitum.

PROPOSITIO XI.

Si ſphæra, vel ſphæroides ſecetur duobus planis parallelis vtcumque, neutro per centrum ducto: quædam autem ex centro recta linea tranſeat per centrum alterutrius ſectionum; per centrum reliquæ tranſibit.

Sit ſphæra, vel ſphæroides ſectum duobus planis pacallelis vtcumque neutro per centrum ducto, quod ſit E: per ſectionum autem, quæ ſunt circuli, vel ſimiles ellipſes, alterutrius centrum F tranſiens recta EFB occurrat reliquæ ſectionis plano in puncto G. Dico reliquæ ſectionis centrum eſſe G. Planum enim per OB ſe-

[Figure 146]

cans ſphæram, vel ſphæroides, faciensque ſectionem circulum, vel ellipſim ABCD, ſecabit, & ſecet prædictas ſectiones, circulos inquam, vel ſimiles ellipſes parallelas, quarum alterius centrum ponitur F. Faciatque ſectiones rectas parallelas AFC, KGH: ſimiliter aliud quodlibet

planum per BE ſecans ſphæram, vel ſphæroides faciat ſectionem circulum, vel ellipſim, & in ea parallelas LFM, NGO, communes ſectiones iam factæ ſectionis ſphæræ vel ſphæroidis cum circulis, vel ellipſibus inter ſe parallelis quarum diametri ſunt AC, KH. Quoniam igitur E eſt centrum ſphæræ, vel ſphæroidis; omnes in eo per punctum E, tranſeuntes rectæ lineæ bifariam ſecabuntur: ſed idem E eſt in ſectione ſphæræ, vel ſphæroidis, circulo, vel ellipſe ABCD; omnes igitur in ipſa rectas lineas bifariam ſecabit punctum E, & centrum erit circuli, vel ellipſis ABCD: quædam igitur ex centro recta EB ſecans parallelarum neutrius per centrum ductæ alteram AC bifariam in circuli, vel ellipſis ALCM centro F, & reliquam in puncto G bifariam ſecabit. Similiter oſtenderemus rectam NO ſectam eſse bifariam in puncto G: atque adeo circuli, vel ellipſis KNHO centrum eſſe G. Recta igitur E, tranſiens per centrum ſectionis ALCM, tranſibit per centrum reliquæ KNHO ipſi ALCM parallelæ. Quod demonſtrandum erat.

COROLLARIVM.

Hinc manifeſtum eſt, ſi ſphæra, vel ſphæroides ſecetur plano non per centrum: & recta linea ſphæræ, vel ſphæroidis, & factæ ſectionis centra iungens ad ſuperficiem vtrinque producatur; talis axis ſegmenta eſſe portionum, earumque vertices extrema dicti axis, vt in figura theorematis ſunt puncta B, D.

PROPOSITIO XII.

Si hemiſphærium, vel hemiſphæroides vtcumque ab ſciſſum: & cylindrus, vel cylindri portio illi circumſcripta: & conus, vel coni portio, cuius baſis eſt eadem ſolido circumſcripto, hemiſphærium, vel hemiſphæroides ad verticem contingens, & communis axis; ſecentur vnoplano, baſi hemiſphærij, vel hemiſphæroidis parallelo: ſuper ſectiones autem prædicti coni, vel portionis conicæ, & hemiſphærij, vel hemiſphæroidis, circa huius abſciſsæ portionis axem duo cylindri, vel portiones cylindricæ conſtiterint; reliquum cylindri vel portionis cylindricæ prædicto plano abſciſsæ, dempto eo cylindro duorum prædictorum, vel portione cylindrica, cuius baſis eſt ſectio hemiſphærij, vel hemiſphæroidis, æquale erit reliquo cylindro, vel portioni cylindricæ, cuius baſis eſt ſectio prædicti coni, vel portionis conicæ.

Eſto hemiſphærium, vel hemiſphæroides ABC, cuius axis BD, baſis circulus, vel ellipſis, cuius diameter AC. Et ſolido ABC circumſcriptus cylindrus, vel portio cylindrica, cuius baſes oppoſitæ erunt circuli, vel ſimiles ellipſes, quarum diametri eiuſdem rationis ADC, EF, latera oppoſita parallelogrammi per axem AFGC: & ſuper baſim, cuius diameter EF, circa axim BD, deſcriptus eſto conus, vel coni portio EDF. Iam tria ſolida ABC, EDF, AC, ſecentur plano ſolidi ABC baſi parallelo, quod ſecabit, & ſecet vnà figuras planas per axim BD

tribus ſolidis communem, poſitas in eodem plano, quæ ſunt AF parallelogrammum, triangulum EDF, & ſemicirculus, vel ſemi ellipſis ABC: & ſint ſectiones rectæ GO, HN, KM: hæ igitnr erunt diametri eiuſdem rationis trium ſectionum, ſcilicet circulorum, vel ellipſium ſirnilium, quibus erit commune centrum L, in quo nimirum axis BD tres dictas lineas GO, HN, KM, bifariam ſecat. Vt igitur de ſolido AF diximus, ſint circa axem BL, & ſuper baſes circulos, vel ellipſes circa HN, KM cylindri, vel portiones cylindricæ HP, KQ, qui vnà cum portione cylindrica, vel cylindro GF ipſa ſectione facto, erunt inter eadem plana parallela per EF, GO.

Dico trium cylindrorum, vel cylindri portionum GF, HP, KQ, reliquum ipſius GF dempto HP, ipſi KQ eſse

[Figure 147]

æquale. Quoniam enim cylindri, & cylindri portiones eiuſdem altitudinis inter ſe ſunt vt baſes, circuli autem, & ſimiles ellipſes; inter ſe, vt quæ à diametris eiuſdem rationis fiunt quadrata; ex Archimede, hoc eſt vt earum quartæ partes, quæ à ſemidiametris quadrata deſcribuntur; erit vt quadratum LO ad quadratum LN, ita cylindrus, vel portio cylindrica GF ad cylindrum, vel portionem cylindricam PH: & diuidendo, vt rectangulum LNO bis vnà cum quadrato NO, ad quadratum LN, ita reliquum cylindri, vel portionis cylindricæ GF, dempto ipſo PH, ad ipſum PH: ſed vt quadratum LN ad quadratum LM, ita eſt vt ſupra, cylindrus, vel portio cylindrica HP ad cylindrum, vel portionem cylindricam KQ, ex æquali igitur,

erit vt rectangulum LNO bis, vnà cum quadrato NO,
ad quadratum LM, ita reliquum cylindri, vel portionis
cylindricæ GF den-
pto HP, ad cylin-
drum, vel portionem
cylindricam KQ:
ſed rectangulum L
NO bis vnà cum qua
drato NO æquale
eſt quadrato LM;
reliquum igitur cy-

[Figure 148]

lindri, vel portionis
cylindricæ GF, den-
pto HP, æquale erit cylindro, vel portioni cylindricæ Kque
Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XIII.

Cylindri, vel portionis cylindricæ hemiſphæ-
rio, vel hemiſphæroidi circumſcriptæ reliquum
dempto hemiſphærio, vel hemiſphæroide, æqua-
le eſt cono, vel portioni conicæ eandem baſim he-
miſphærio, vel hemiſphæroidi, & eandem altitu-
dinem habenti.

Eſto hemiſphærio, vel hemiſphæroidi ABC, cu-
ius axis BD, baſis circulus, vel ellipſis circa diametrum
ADC, circumſcriptus cylindrus, vel cylindrica portio
AE, circa communem ſcilicet axim BD. conus autem,
vel coni portio circa axim BD, baſim habens commu-
nem ſolido ABC, intelligatur. Dico reliquum ſolidi
AE, dempto hemiſphærio, vel hemiſphæroide ABC æ-

quale eſse cono, vel portioni conicæ. Nam circa axim BD, & ſuper baſim circulum, vel ellipſim, cuius diameter RE, ſimilem & oppoſitam ei, quæ circa AC, deſcribatur conus, vel coni portio RDE. Deinde axe BD bifariam ſecto, & ſingulis eius partibus rurſus bifariam, vt partes axis BD omnes ſint æquales, per puncta ſectionum, quotquot erunt, totidem plana parallela ſecent vnà cum ſolido AE duas ipſius partes, ſolida ABC, RDE. Omnes igitur factæ ſectiones, vel erunt circuli, vel ſimiles ellipſes ei, quæ eſt circa AC, atque adeo inter ſe ſimiles: talium autem ſectiones communes cum AE parallelo,

[Figure 149]

grammo per axim, erunt rectæ lineæ, ternæ in ſingulis planis ſecantibus, & in eadem recta linea; vt in proxima ipſi RE, ſunt FL, GN, KM, quæ quidem erunt trium circulorum, vel ſimilium ellipſium diametri eiuſdem rationis baſium trium ſolidorum, cylindri ſcilicet, vel portionis cylindricæ FL, fruſti GL, & portionis KBM, he miſphærij, vel hemiſphæroidis ABC. Itaque circa axem BH cylindri, vel portionis cylindricæ FE, & ſuper baſes circulos, vel ellipſes circa GN, KM, deſcribantur cylindri, vel cylindri portiones GP, KQ, qui pattes erunt totius cylindri, vel portionis cylindricæ FE. Idem fiat circa reliquas axis partes BD tamquam axes,

ſuper reliquas ſectiones ternas in ſingulis prædictis planis ſecantibus. Hac ratione habebimus iam duas figuras compoſitas ex cylindris, vel cylindri portionibus altitudine, & multitudine æqualibus, alteram cono, vel portioni conicæ RDE inſcriptam, alteram hemilphærio, vel hemiſphæroidi ABC circumſcriptam: quod ita factum eſſe intelligatur, quemadmodum in primo libro fieri poſse demonſtrauimus, vt figura cono RDE inſcripta ab eo deficiat, hemiſphærio autem, vel hemiſphæroidi ABC circumſcripta ipſum excedat minori ſpacio magnitudine propoſita quantacumque illa ſit. Reliquo itaque cylin-

[Figure 150]

dri, vel portionis cylindricæ AE dempto hemiſphærio, vel hemiſphæroide ABC figura quædam inſcripta relinquetur ex cylindris, vel portionis cylindricæ reſiduis æqualium altitudinum, demptis ijs, ex quibus conſtat figura hemiſphærio, vel hemiſphæroidi ABC circumſcripta, excepto infimo cylindro, vel portione cylindrica AS. Et quoniam (excepto exceſsu, quo ſolidum AS excedit ſui partem portionem quandam hemiſphærij, vel hemiſphæroidis ABC) quo ſpacio figura hemiſphærio, vel hemiſphæroidi ABC circumſcripta ſuperat ipſum hemiſphærium, vel he hemiſphæroides, eodem figura prædicto reſiduo inſcripta deduo; deficiet ab eodem minori differentia quàm

ſit magnitudo propoſita,. His ita ex poſitis, quoniam ex præcedenti, reliquum cylindri, vel portionis cylindricæ FE dempto cylindro, vel portione cylindrica KQ, æquale eſt cylindro, vel portioni cylindricæ GP: eademque ratione ſingula cylindrorum, vel cylindri portionum reſidua, quæ ſunt in reliqua figura cylindri, vel portionis cylindricæ AE, dempto hemiſphærio, vel hemiſphæroide ABC, æqualia erunt ſingulis cylindris, vel cylindri portionibus, quæ ſunt in cono, vel portione conica RDE, ſi bina ſumantur inter eadem plana parallela, vel circa eundem axem; tota igitur figura inſcripta prædicto reſiduo, toti figuræ inſcriptæ cono, vel portioni conicæ RDE æqualis erit: deficit autem vtraque figura inſcripta à ſibi circumſcripta minori ſpacio quantacumque magnitudine propoſita; per tertiam igitur huius, reliquum cylindri, vel portionis cylindricæ AE, dempto hemiſphærin, vel hemiſphæroide ABC, æquale eſt cono, vel portioni conicæ RDE, hoc eſt ipſi ABC. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XIV.

Si hemiſphærium, vel hemiſphæroides, & cylin drus, vel portio cylindrica ipſi circumſcripta, & conus, vel coni portio, cuius eſt idem axis portioni, baſis autem qu<17> opponitur communi baſi duorum prædictorum ſolidorum, vnà ſecentur duobus planis baſi parallelis; portiones reliquæ figuræ ex cylindro, vel cylindri portione hemiſphærio, vel hemiſphæroidi circumſcripta dempto hemiſphærio, vel hemiſphæroide, quæ à duobus prædictis planis ſecantibus fiunt, æquales ſunt ſin-

gulæ ſingulis prædicti coni, vel conicæ portionis partibus ſiue fruſtis inter eadem plana parallela reſpondentibus.

Eſto hemiſphærium, vel hemiſphæroides ABC, cuius axis BD, baſis circulus, vel ellipſis, cuius diameter ADC. ſolido autem ABC circumſcriptus cylindrus, vel portio cylindrica AXEC: & conus, vel coni portio ſit XDE, cuius vertex D, baſis circulus, vel ellipſis circa XBE baſi ſolidi AE, vel ABC, prædictæ oppoſita, ſecto autem ſolido AE, atque vnà cum ipſo eius partibus, ſolidis ABC, XD E, duobus planis baſi ſolidi AE, vel ABC, atque ideo inter ſe quoque parallelis, intelligantur trium ſolidorum portiones ternæ in-

[Figure 151]

ter eadem plana parallela: videlicet inter duo per XE, FN, hemiſphærij, vel hemiſphæroidis minor portio HBL: & reliquum cylindri, vel portionis cylindricæ FE dempta portione HBL: & coni, vel conicæ portionis fruſtum XGME. ſimiliter inter duo plana per FN, OV ſolidi ABC portio PHLT, eaque ablata reliquum ſolidi ON, & fruſtum GQSM. Denique ſolidi ABC portio APTC, eaque ablata, reliquum ſolidi AV, & conus, vel coni portio QDS. Dico reliquum ſolidi FE, dempto HBL eſſe æquale fruſto XGME: & reliquum ſolidi ON dempto PHLT, æquale fruſto GQSM: & reliquum ſolidi AV dempto ſolido APTC æquale ſolido QDS.

Quoniam enim vt ſupra oſtendimus, reliquum ſolidi AE, dempto ſolido ABC æquale eſse ſolido XDE, ſimiliter oſtenſum remanet, tam reliquum ſolidi AN, dempto ſolido AHLC, æquale eſse ſolido GDM, quam reliquum ſolidi AV dempto ſolido APTC æquale ſolido QDS; erit demptis æqualibus, tam reliquum ſolidi FE, dempto ſolido HBL, æquale ſolido XGME; quam reliquum ſolidi ON, dempto ſolido PHLT æquale ſolido GQSM. At reliquum ſolidi AV dempto ſolido APTC ſolido QDS æquale erit. Manifeſtum eſt igitur propoſitum.

PROPOSITIO XV.

Hemiſphærium, vel hemiſphæroides ſubſeſqui alterum eſt cylindri; vel portionis cylindricæ ipſi circumſcriptæ.

Eſto hemiſphærium, vel hemiſphæroides ABC, ipſique circumſcriptus cylindrus, vel portio cylindrica AE, circa eundem ſcilicet axem BD, & ſuper candem baſim circulum, vel ellipſim, circa AC: nam hac ratione baſis oppoſita ſolidum ABC tanget ad verticem B. Dico hemiſphærium, vel hemiſphæroides ABC eſse cylindri, vel portionis cylindricæ AE ſub

[Figure 152]

ſeſquialterum. Nam circa axem BD, ſuper prædictam baſem circa AC, eſto deſcriptus conus, vel coni portio ABC. Quoniam igitur

cylindri, vel portionis cylindricæ AE reliquum dempto hemiſphærio, vel hemiſphæroide ABC æquale eſt cono, vel portioni conicæ ABC: & cylindrus, vel portio cylindrica AE tripla eſt coni, vel portionis conicæ ABC; triplus itidem erit cylindrus, vel cylindrica portio AE dicti reſidui dempto hemiſphærio, vel hemiſphæroide ABC; ac propterea hemiſphærij, vel he-

[Figure 153]

miſphæroidis ABC ſeſquialter, hoc eſt hemiſphærium, vel hemiſphæroides ABC cylindri, vel portionis cylindricæ AE ſubſeſquialterum. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XVI.

Omnis minor portio ſphæræ, vel ſphæroidis ad cylindrum, vel cylindri portionem, cuius baſis æqualis eſt circulo maximo, vel æqualis, & ſimilis ellipſi per centrum baſi portionis parallelæ, & eadem altitudo portioni; eam habet proportionem, quam rectangulum contentum ſphæræ, vel ſphæroidis dimidij axis axi portionis congruentis ijs, quæ à centro baſis portionis fiunt ſegmentis, vnà cum duobus tertiis quadrati axis portionis; ad ſphæræ, vel ſphæroidis dimidij axis quadratum.

Sit minor portio ABC, ſphæræ, vel ſphæroidis, cuius centrum D, axis autem axi portionis congruens BEDR:

& cylindrus, vel portio cylindrica FG abſciſsa vnà cum portione ABC ex cylindro, vel portione cylindrica NO circumſcripta hemiſphærio, vel hemiſphæroidi NBO, cuius baſis circa diametrum NO, ſit baſi portionis ABC parallela: qua ratione baſis prædicti ſolidi FG, erit vel cir culus, vel ellipſis æqualis circulo maximo, vel ſimilis, & æqualis ellipſi circa NO, portionis ABC baſi parallelæ. Dico portionem ABC ad cylindrum, vel portionem cylindricam FG, eſse vt rectangulum BED, vnà cum duabus tertiis quadrati EB ad quadratum BD. Eſto enim conus, vel coni portio HDG, cuius fruſtum HKLG prædicto plano abſciſſum: & omnino ſint circulorum, vel ellipſium ſimilium diametri eiuſdem rationis cum NO, vt ad XII huius, in eadem recta linea tres FM, AC, KL, ſectæ omnes bifariam in communi centro E,

[Figure 154]

& HBG, in eodem plano per axem. Quoniam igitur ex ſuperioribus, reliquum ſolidi FG, dempto ABC, æquale eſt fruſto HKLG; erit eiuſdem ſolidi FG reliquum ABC æquale reliquo ſolidi FG, dempto HKLG: ſed hoc reliquum dempto HKLG, ſupra oſtendimus eſse ad ſolidum FG, vt rectangulum ex KL, & differentia HG, vnà cum duabus tertiis quadrati differentiæ, ad quadratum GH: & vt HG ad KL, ita eſt BD ad DE, propter ſimilitudinem triangulorum; vt igitur eſt rectangulum BED, vnà cum duabus tertiis quadrati BE, ad quadratum BD, ita erit portio ABC, ad cylindrum, vel portionem cylindricam FG. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XVII.

Omnis portio ſphæræ, vel ſphæroidis abſciſſa duobus planis parallelis, alteroper centrum ducto, ad cy lindrum, vel cylindri portionem, cuius baſis eſt eadem, quæ maior baſis portionis, & eadem altitudo; eam habet proportionem, quam rectangulum contentum ijs, quæ à centro minoris baſis fiunt axis ſphæræ, vel ſphæroidis ſegmentis, vnà cum duabus tertiis quadrati axis portionis; ad ſphæræ, vel ſphæroidis dimidij axis quadratum.

Sit portio NACO ſphæræ, vel ſphærodij, cuius centrum D, axis autem axi portionis congruens BEDR, abſciſsa duobus planis parallelis altero per centrum D, ſectionem faciente circulum maximum, vel ellipſim, cuius diameter NO, & ſuper dictam ſectionem, circa axem ED, ſtet cylindrus, vel portio cylindrica NM, abſciſsa ijſdem planis, quibus portio NACO, à cylindro, vel portione cylindrica NG, ſit circumſcripta hemiſphærio, vel hemiſphæroidi NBO: qua ratione erit cylindri,

[Figure 155]

vel portionis cylindricæ NM baſis eadem, quæ maior baſis portionis NACO, circulus ſcilicet, vel ellipſis circa NO, & eadem altitudo portioni. Dico portionem

NACO, ad cylindrum, vel portionem cylindricam NM, eſse vt rectangulum BER, vnà cum duabus tertiis ED quadrati, ad quadratum BD. Ijſdem enim quæ in præcedenti conſtructis, & notatis, ſit præterea cylindrus, vel portio cylindrica PL, circa axim ED circumſcripta cono, vel portioni conicæ KDL, Quoniam igitur reliquum cylindri, vel portionis cylindricæ NM, dempta portione NACO æquale eſt cono, vel portioni conicæ KDL, erit reliqua portio NACO æqualis reliquo eiuſdem NM, dempto cono, vel portione conica KDL. Et quoniam circuli, & ſimiles ellipſes inter ſe ſunt vt quadrata diametrorum, vel ſemidiametrorum eiuſdem rationis: cylindri autem, & portiones cylindricæ eiuſdem altitudinis inter ſe vt baſes; erit vt quadratum EM, hoc eſt quadratum BG, ad quadratum EL, hoc eſt vt quadratum BD ad quadratum DE, propter ſimilitudinem triangulorum, ita ſolidum NM ad ſolidum PL: & per conuerſionem rationis, vt quadratum BD ad rectangulum BED bis, vnà cum quadrato BE, ita ſolidum MN, ad ſui reliquum dempto ſolido PL: & conuertendo, vt rectangulum BED bis, vnà cum quadrato BE, hoc eſt rectangulum BER, ad quadratum BD, ita reliquum ſolidi NM dempto ſolido PL ad ſolidum NM. Rurſus, quoniam eſt vt quadratum EL ad quadratum EM, ſiue BG, hoc eſt vt quadratum ED ad quadratum BD, ita ſolidum PL ad ſolidum NM, ob ſimilem rationem ſupradictæ: & duæ tertiæ partes ſolidi PL eſt ſolidum KDL; erit ex æquali, vt duæ tertiæ quadrati ED ad quadratum BD, ita reliquum ſolidi PL dempto ſolido KDL, ad ſolidum NM: ſed vt rectangulum BER ad quadratum BD, ita erat ſolidi NM reliquum dempto ſolido PL, ad ſolidum NM; vt igitur prima cum quinta ad ſecundam, ita erit tertia cum ſexta ad quartam; videlicet, vt rectangulum BED, vnà cum duabus tertiis ED quadrati ad quadratum BD, ita reliquum

cylindri, vel portionis cylindricæ NM, dempto cono, vel portione conica KDL, hoc eſt portio NACO ipſi æqualis, ad cylindrum, vel portionem cylindricam NM. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XVIII.

Omnis portio ſphæræ, vel ſphæroidis abſciſſa duobus planis parallelis, neutro per centrum ducto, nec centrum intercipientibus, ad cylindrum, vel cylindri portionem, cuius baſis æqualis eſt circulo maximo, vel ellipſi per centrum baſibus portionis parallelæ ſimilis, & æqualis, eam habet proportionem, quam duo rectangula; & quod ſphæræ, vel ſphæroidis axis axi portionis congruentis ijs, quæ à centro minoris baſis portionis fiunt ſegmentis, & quod ea, quæ maioris baſis portionis, & ſphæræ, vel ſphæroidis centra iungit, & axe portionis continetur, vnà cum duabus tertijs quadrati axis portionis; ad ſphæræ, vel ſphæroidis dimidij axis quadratum.

Sit portio AQTC ſphæræ, vel ſphæroidis, cuius centrum D, axis autem axi portionis congruens BSEDR, abſciſſum duobus planis parallelis, neutro per centrum D acto, nec ipſum intercipientibus: & circa portionis axim SE ſtet cylindrus, vel portio cylindrica FX abſciſsa vnà cum portione AQTC ex toto cylindro, vel portione cylindrica NG, hemiſphærio, vel hemiſphæroidi NBO circumſcripta, cuius baſis circulus maximus

vel ellipſis circa NO baſibus AQTC portionis parallelæ qua ratione cylindrus, vel portionis cylindricæ FX eiuſdem altitudinis portioni AQTC, baſis erit circulus æqualis circulo maximo, vel ellipſis ſimilis, & æqualis ei, cuius diameter NDO, baſibus AQTC portionis parallelæ. Dico portionem AQTC ad cylindrum, vel portionem cylindricam FX, eſſe vt duo rectangula BSR, DES, vnà cum duabus tertiis quadrati ES, ad quadratum BD. Ijſdem enim conſtructis, & notatis, quæ in antecedenti, excepto cylindro, vel portione cylindrica, quæ circa axim ED ſteterat: planum præterea minoris baſis QT portionis AQTC extendatur: & ſecans tria ſolida, & figuras planas per axim poſitas in eodem plano, faciat ternas ſectiones, circulos, vel ellipſes ſimiles ei, quæ eſt circa NO: & earum diametros IX, PV, QT, in eadem recta linea communi ſectione extenſi plani, &

[Figure 156]

eius, quod per axem: quæ quidem diametri ſectæ erunt omnes bifariam in centro S communi trium prædictarum planarum ſectionum. Denique coni, vel portionis conicæ HDG fruſto PKIV abſciſſo vnà cum portione AQTC, ſit circa axim SE circumſcriptus cylindrus vel portio cylindrica ZV. Quoniam igitur per XIIII huius, reliquum ſolidi FX, dempta portione AQTC, æquale eſt fruſto PKLV; erit reliqua portio AQTC, reliquo eiuſdem ſolidi FX, dempto fruſto PKLV æqualis. Et quoniam eſt vt PV ad KL, ita SD, DE, propter ſimilitudinem triangulorum: & vt rectangulum ex KL, & differentia

ipſius PV, vnà cum duabus tertiis quadrati eiuſdem differentiæ, ad quadratum PV, ita eſt reliquum ſolidi ZV dempto fruſto PKLV ad ſolidum ZV; erit vt rectangulum DES, vnà cum duabus tertiis quadrati ES, ad DS quadratum, ita ſolidi ZV reliquum dempto fruſto PK LV ad ſolidum ZV: ſed vt quadratum DS ad quadratum DB, hoc eſt vt quadratum SV ad quadratum BG, ideſt ad quadratum SX, ita eſt ſolidum ZV, ad ſolidum FX; ex æquali igitur, vt rectangulum DES, vnà cum duabus tertiis ES quadrati, ad quadratum BD, ita eſt reliquum ſolidi ZV, dem pto ſolido PKLV ad ſo lidum FX: ſed vt rectangulum BSR ad quadratum BD, ita eſt, eadem ratione, qua in præcedenti theoremate vtebamur, reliquum ſolidi FX dempto ſolido ZV, ad ſolidum FX; vt igitur prima cum quinta ad ſecundam, ita tertia cum ſexta ad quartam; videlicet, vt duo

[Figure 157]

rectangula BSR, DES, vnà cum duabus tertiis quadrati ES ad quadratum BD, ita erit totum reliquum cylindri, vel portionis cylindricæ FX dempto fruſto PKLV: hoc eſt ſphæræ, vel ſphæroidis portio AQTC ad cylindrum, vel portionem cylindricam FX. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XIX.

Omnis maior portio ſphæræ, vel ſphæroidis, ad cylindrum, vel portionem cylindricam, cuius baſis æqualis eſt circulo maximo, vel æqualis, & ſimilis ellipſi per centrum baſi portionis parallelæ, altitudo autem eadem portioni, eam habet proportionem, quam ſolidum rectangulum contentum axe portionis, & reliquo axis ſphæræ, vel ſphæroidis ſegmento, & eo, quod baſis portionis, & ſphæræ, vel ſphæroidis centraiungit, vnà cum binis tertiis partibus duorum cuborum: & eius qui à ſphæræ, vel ſphæroidis axis dimidio; & cius qui ab eo, quod ſphæræ, vel ſphæroidis, & baſis portionis centra iungit ſit ſegmento; ad ſolidum rectangulum, quod axe portionis, & duobus ſphæræ, vel ſphæroidis axis ſit dimidijs.

Sit maior portio ABC, ſphæræ, vel ſphæroidis ABCF, cuius centrum D: baſis autem portionis, circulus, vel ellipſis, cuius diameter AC: Et ſecta portione ABC per centrum D plano baſi AC parallelo, qua ratione ſectio erit circulus maximus, vel ellipſis ſimilis baſi

[Figure 158]

portionis: eſto ea cuius diameter KL, iungensque recta DE ſphæræ, vel ſphæroidis, & baſis portionis centra DE, atque producta incidat in ſphæræ, vel ſphæroidis ſuperficiem ad partes E in puncto F, & ad partes oppoſitas in puncto B: ſphæræ igitur, vel ſphæroidis axis axi portionis BE congruens crit BDEF, nam vertex portionis erit B: & hemiſphærio, vel hemiſphæroidi KBL ſit circumſcriptas cylindrus, vel cylindrica portio KH, cuius ſcilicet axis BD, & circa axim DE, alter cylindrus, vel portio cylindrica GL portioni KACL circumſcripta: quorum circumſcriptorum ſolidorum vtriulque communis baſis erit circulus, vel ellipſis circa KL. Itaque ex his compoſitus totus cylindrus, vel cylindri portio GH erit portioni ABC circumſcripta, habens axim BE, atque ideo eandem altitudinem ABC portioni, baſim autem, cuius diameter ſit GM ſimilem

[Figure 159]

& æqualem ei, quæ eſt circa KL. Dico portionem ABC ad cylindrum, vel portionem cylindricam GH, eſse vt ſolidum rectangulum contentum ipſis BE, EF, ED, vnà cum binis tertiis duorum cuborum, duabus ſcilicet cubi BD, & totidem cubi ED, ad ſolidum rectangulum contentum ipſis EB, BD, DF. Quoniam enim parall elepipeda eiuſdem altitudinis inter ſe ſunt vt baſes, erit vt rectangulum BEF vnà cum duabus tertiis ED quadrati ad rectangulum BDF, ideſt ad quadratum BD, ſiue DF, ita ſolidum ex BE, EF, ED, communi altitudine DE, vnà cum duabus tertiis cubi ED, ad ſolidum ex DE,

BD, DF: ſed vt rectangulum BEF, vnà cum duabus DE quadrati, ad quadratum DF, ita oſtendimus eſſe portionem AKLC ad ſolidum GL; vt igitur eſt ſolidum ex BE, EF, ED, vnà cum duabus tertiis cubi ED, com muni altitudine DE, ad ſolidum ex ED, BD, DF, ita erit portio AKLC ad ſolidum GL: ſed vt ſolidum ex ED, DB, DF, hoc eſt id, cuius altitudo ED, baſis BD quadratum, ad ſolidum ex EB, BD, DF, hoc eſt ad id, cuius altitudo BE, baſis quadratum BD, ita eſt altitudo, vel latus ED, ad altitudinem vel latum BE: hoc eſt ſolidum GL ad ſolidum GH; quippe quorum dictæ lineæ ED, BE ſunt axes; ex æquali igitur, vt ſolidum ex BE, EF, ED, vnà cum duabus tertiis cubi DE, ad ſolidum ex EB, BD, DE, cuius altitudo EB, baſis quadratum BD, ita erit portio AKLC ad ſolidum GH. Rurſus, quoniam ſolidum HK eſt hemiſphærij, vel hemiſphæroidis KBL ſeſquialterum; erit vt duæ tertiæ partes cubi BD ad cubum BD, ita hemiſphærium, vel hemiſphæroides KBL ad ſolidum KH: ſed vt cubus BD ad ſolidum ex BD, DF, & altitudine BE, hoc eſt vt altitudo BD ad altitudinem BE, ita eſt ſolidum KH ad ſolidum GH, quorum dictæ altitudines BD, BE ſunt axes, ex æquali igitur erit vt duæ tertiæ partes cubi BD ad ſolidum ex EB, BD, DF, ita hemiſphærium, vel hemiſphæroides KBL, ad ſolidum GH: ſed vt ſolidum ex BE, EF, ED, vna cum duabus tertiis cubi ED ad ſolidum ex EB, BD, DF, erat portio AKLC ad cylindrum GH; vt igitur prima cum quin ta ad ſecundam, ita tertia cum ſexta ad quartam, videlicet, vt duæ tertiæ cubi BD, vna cum duabus tertiis cubi BE, & ſolido ex BE, EF, ED ad ſolidum ex EB, BD, DF, ita erit ſphæræ, vel ſphæroidis maior portio ABC ad ſolidum, cylindrum ſcilicet, vel portionem cylindricam GH. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XX.

Omnis portio ſphæræ, vel ſphæroidis abſciſsa duobus planis parallelis centrum intercipientibus, ad cylindrum, vel cylindri portionem, cuius baſis æqualis eſt circulo maximo, vel ſimilis, & æqualis ellipſi per centrum baſibus portionis parallelæ, & eadem altitudo portioni, eam habet proportionem, quam duo ſolida rectangula ex ternorum ſphæræ, vel ſphæroidis axis ſegmentorum eundem terminum habentium alterutrius baſium portionis centrum, binis ſphæræ, vel ſphæroidis axem complentibus, & ſingulis axis portionis itidem à centro ſphæræ, vel ſphæroidis factis, vnà cum binis tertijs partibus duorum cuborum ex ſegmentis axis portionis à centro ſphæræ, vel ſphæroidis factis; ad ſolidum rectangulum, quod duobus ſphæræ, vel ſphæroidis axis dimidiis, & axe portionis continetur.

Sit portio ABCD ſphæræ, vel ſphæroidis, cuius centrum E, axis portionis KEH: ipſi autem portioni circumſcriptus cylindrus, vel cylindrica portio NO, vt in antecedenti, cuius communis ſectio cum ſphæra, vel ſphæroide AFDG, ſit circulus maximus, vel ellipſis circa diametrum LEM; quamobrem baſis ſolidi NO, eiuſdem altitudinis portioni ABCD circulus erit æqualis circulo maximo, vel ellipſis æqualis, & ſimilis ellipſi circa LM baſibus portionis parallelæ. Dico portionem ABCD

ad cylindrum, vel cylindri portionem NO, eſse vt duo ſolida ad rectangula, alterum ex FH, HG, EH: alterum ex GK, KF, EK, vnà cum binis tertiis duorum cuborum ex EK, EH, ad ſolidum rectangulum ex GE, EF KH, axe enim KH producto vt incidat in ſuperficiem in punctis F, G, ſit ſphæræ, vel ſphæroidis, ex demonſtratis, axis FK, EHG. Intelliganturque vt in antecedenti duo cylindri, vel cylindri portiones NM, LO, totius prædicti ſolidi NO: itemque duæ portiones ſphæræ, vel ſphæroidis ALMD, LBCM, quorum quatuor ſolidorum commu nis baſis eſt circulus, vel ellipſis circa LEM. Quoniam igitur vt in antecedenti oſtenderemus portionem ALM D ad ſolidum NM eſ ſe vt ſolidum ex FH, HG, EH, vnà cum duabus tertiis cubi EH ad ſolidum ex FE, EG, EH, communi altitudine EH: ſed vt ſolidum ex FE, EG, EH,

[Figure 160]

altitudine EH, ad ſolidum ex FE, EG, KH altitudine KH, ita eſt altitudo EH ad altitudinem KH, hoc eſt ſolidum NM ad ſolidum NO, quippe quorum ſunt axes EH, KH; ex æquali igitur erit vt ſolidum ex FH, HG, EH, vnà cum duabus tertiis cubi EH, ad ſolidum ex FE, EG, KH, ita portio ALMD, ad ſolidum NO. Eadem ratione oſtenderemus eſſe, vt ſolidum ex GK, KF, EK, vnà cum duabus tertiis cubi EK, ad ſolidum ex FE, EG, KH, ita portionem LBCM, ad ſolidum NO; vt igitur prima cum quinta ad ſecundam,

ita tertia cum ſexta ad quartam; videlicet, vt duo ſolida, & quod ſit ex FH, HG, EH, & quod ex GK, KF, EK, vnà cum duabus tertiis & cubi ex EH, & cubi ex EK, ad ſolidum ex FE, EG, KH, ita erit tota ſphæræ, vel ſphæroidis portio ABCD, ad cylindrum, vel portionem cylindricam NO. Quod demonſtrandum erat.

[Figure 161]

PROPOSITIO XXI.

Omnis trianguli comprehenſi ſectione parabola, ex duabus rectis lineis, quarum altera ſectionem tangat, altera in eam incidat diametro ſectionis ex contactu æquidiſtans, centrum grauitatis eſt punctum illud, in quo recta linea ex contactu diuidens incidentem ita vt pars, quæ ſectionem attingit ſit ſeſquialtera reliquæ, ſic diuiditur, vt pars quæ eſt ad contactum ſit tripla reliquæ.

Sit triangulum ABC comprehenſum ſectione parabola ADB, & duabus rectis lineis, quarum altera AC tangat ſectionem in puncto A, reliqua autem BC, in eam incidens in puncto B, ſectionis diametro ex puncto A, æquidiſtans intelligatur: & per centrum grauitatis trian-

guli ABC quod ſit F, ſit ducta recta AFE. Dico AF eſſe ipſius FE triplam: at BE ipſius EC ſeſquialteram. Completo enim triangulo rectilineo ABC, ſectis que rectis lineis bifariam AB in puncto H, & AC in puncto K ducatur HDK, quæ parallela erit baſi BC: parabolæ igitur ſegmenti BDA dia meter erit DH; in qua parabolæ ADB, cuius vertex D ſit centrum grauitatis M: trianguli autem rectilinei ABC centrum grauitatis N, & iun gatur MN: producta igitur MN occurret trianguli ABC mixti centro grauitatis F. ſint igitur centra M, N, F, in eadem recta linea: & ducta recta AN G ſecet baſim BC bifariam in G pun cto, neceſſe eſt enim: & ex puncto F ad rectam AG, ducatur recta FO ipſis BC, KH pa rallela, & BD, DA iungantur. Quoniam igitur AG ſecat BC, KH parallelas in rectolineo triangulo ABC,

[Figure 162]

in eaſdem rationes; ſecta erit HK bifariam à linea AG: cumque HD diameter parabolæ ADC, cuius vertex D, ſit parallela diametro parabolæ, cuius vertex A, atque ideo etiam BC incidenti parallela, erit DH pars ipſius KH: quoniam igitur in triangulo mixto ABC recta KD applicata parallela eſt ipſi BC, quæ itidem eſt parallela diametro parabolæ, cuius vertex A; erit vt AC ad AK potentia, ita BC ad DK longitudine, quod ſupra demonſtrauimus: ſed AC quadrupla eſt potentia ipſius AK;

quadrupla igitur BC ipſius DK: cum igitur BC ſit dupla ipſius KH, erit DK dimidia eiuſdem KH, & ſecta bifariam KH in puncto D: ſed recta AG ſecabat eandem KH bi fariam; per punctum igitur D tranſibit AG. Quoniam igitur parabola ADC, cuius vertex D, ſeſquitertia eſt per Archimedem trianguli ADB, cuius duplum eſt triangulum ABG, ſicut & huius triangulum ABC; triangulum ABC quadruplum erit trianguli ADB: qualium igitur partium æqualium eſt triangulum ABC duodecim, talium erit triangulum ADB trium, & parabola ADB, cuius vertex D quatuor: duplum igitur erit triangulum ABC mixtum parabolæ ADB, cuius vertex D, & centrum grauitatis M: ſed trianguli ABC rectilinei eſt centrum grauitatis N, & F trianguli ABC mixti; dupla igitur erit MN ipſius NF, & MD ipſius

[Figure 163]

OF, & DN ipſius NO, propter ſimilitudinem triangulorum: ſed & tota AN dupla eſt totius NG, ob centrum grauitatis N rectilinei trianguli ABC; reliqua igitur AD dupla eſt reliquæ GO. cum igitur AG ſit dupla ipſius AD, quadrupla erit AG ipſiuſque GO. quare & quadrupla AE ipſius FE ob parallelas: tripla igitur AF ipſius FE. Rurſus quoniam ex Archimede ſeſquialtera eſt DM ipſius MH, erit tota DH ad DM vt quinque ad tria, hoc eſt vt decem ad ſex: ſed MD erat dupla ipſius OF; tota igi-

tur DH ad OF erit vt decem ad tria: ſed GC dupla eſt ipſius DH; igitur GC ad FO vt viginti ad tria: ſed quia tripla exiſtente AO ipſius OG, eſt tota AG ipſius AO ſeſquitertia, erit quoque GE, ipſius OF ſeſquitertia, propter ſimilitudinem triangulorum AGE, AOF, hoc eſt qualium partium æqualium OF trium, talium GE quatuor; qualium eſt GC hoc eſt BG viginti, talium erit EG quatuor, & EC ſexdecim: dempta igitur EG ex GC, & addita ipſi BG, qualium eſt EC ſexdecim: talium erit BE vigintiquatuor: ſed vt vigintiquatuor ad ſexdecim, ita ſunt tria ad duo, quæ proportio eſt ſeſquialtera, ſeſquialtera igitur erit BE ipſius EC, oſtenſa eſt autem AF ipſi FE tripla. Manifeſtum eſt igitur propoſitum.

PROPOSITIO XXII.

Si duo triangula mixta prædicti generis verticem communem habeant, qui eſt contactus, & baſes æquales in eadem recta linea, vel continuas, vel ſegmento interiecto, tota extra ſiguram verſa cauitate; centrum grauitatis compoſiti ex vtroque eſt pun ctum illud, in quo recta linea à vertice ad bipartitæ rectæ prædictis ſectionibus interceptæ, in qua ſunt baſes dictorum triangulorum ſectionis punctum pertinens ſic diuiditur; vt pars, quæ eſt ad verticem ſit tripla reliquæ.

Sint duo prædicti generis triangula ABC, ADE habentia verticem A communem, qui eſt contactus recta. rum cum parabolis, tangente AB parabolam AC, &

AD parabolam AE: baſes autem æquales BC, DE parallelas parabolarum diametres per A, & in vna recta linea CE ſegmento BD interiecto: vtriuſque autem ſectionis AC, AE concauitas ſpectet extra figuram ACE: ſecta autem CE bifariam in F, iunctaque AF, ponatur AG tripla ipſius GF. Dico compoſiti ex triangulis ABC, ADE centrum grauitatis eſſe G. Poſita enimvtraque ſeſquialtera, CH ipſius HB, & EK ipſius KD, iunctisque AH, AK, ducatur per punctum G ipſi CE parallela ſecans AH, AK in punctis L, M. Quoniam igitur LM ipſi CE parallela ſecat eas quæ ex puncto A ad rectam CD ducuntur rectas lineas in eaſdem rationes, & eſt AG tripla ipſius GF; tripla erit vtraque AL ipſius LH, & AM ipſius MK: ſeſquialtera autem eſt CH ipſius HB, & EK ipſius KD; erit igitur L centrum grauitatis trianguli ABC, & M trianguli ADE per præcedentem. Rurſus quoniam abſoluantur triangula rectilineæ ACB, AEK, & æqualia erunt propter æquales baſes, poſita inter eaſdem parallelas, & vtrumque ſeſquialterum eius trianguli mixti, quod comprehendit, ex demonſtratione antecedentis; æqualia igitur erunt triangula mixta ABC, ADE, ſiquidem ſunt æqualium ſubſeſquialtera. Et quoniam componendo, & permutando eſt vt CB ad DE ita BH ad DK, æqualis erit BH ipſi DK: ſed ſi ab æqualibus poſitis CF, FE ipſas CB, DE æquales au-

[Figure 164]

feras, reliquæ BF, FD æquales erunt; tota igitur FH toti FK æqualis eſt: in triangulo autem AHK recta AF ſecat LM, HK parallelas in eaſdem rationes; erit igitur LG æqualis ipſi GM; cum igitur æqualium triangulorum ABC, ADE centra grauitatis ſint L, M; erit compoſiti ex vtroque centrum grauitatis G. Idem oſtenderemus, quod proponitur, & ſi baſes prædictorum triangulorum ſint continuæ. Manifeſtum eſt igitur propoſitum.

PROPOSITIO XXIII.

Si duæ parabolæ in eodem plano circa æquales diamet ros in directum inter ſe conſtitutas, ita vt vertices ſint extrema ex diametris compoſitæ, communem habuerint aliquam ordinatim ad diametrum applicatarum, & vertices cum puncto conuenientiæ iungantur rectis lineis: centrum grauitatis v triuſque portionis ijs rectis lineis ab ſciſſæ, rectam lineam, quæ terminum communem diamctrorum, & concurſum parabolarum iungit bifariam diuidit.

Circa æquales diametros AD, DC indirectum inter ſe conſtitutas, verticibus A, C, duæ parabolæ in eodem plano communem habeant aliquam BD ordi-

[Figure 165]

natim ad vtramque diametrorum applicatarum, iunctis-
que AB, BC, ſit ſecta BD bifariam in puncto G.
Dico G eſse centrum grauita tis duarum portionum AEB,
BFE ſimul. Si enim hoc non eſt, ſit aliud punctum L. &
compleantur parallelogramma ANBD, DBRC, hoc
eſt totum AR parallelogrammum: & ſecta BG bifariam
in puncto H, ponatur DK ipſius BD pars tertia, vt pun-
ctum K ſit trianguli ABC centrum grauitatis. Poſita au-
tem ſeſquialtera BP ipſius PN, & BQ ipſius QR, iun-
ctisque AP, CQ, duoatur per punctum H ipſi AC, vel
NR parallela, cum ipſis AP, CQ conueniens in punctis
ST: & iuncta LG,
ſi punctum L non
ſit in linea BD,
eſto LM quintu-
pla ipſius MG.
Quoniam igitur ob
parallelas AC, P
Q, ST in trape-
zio APQC, eſt
vt DH ad HB, ita
AS ad SP, & CT

[Figure 166]

ad TQ, erit AS ipſius SP, & CT ipſius TQ tripla:
ſed eſt BP ſeſquialtera ipſius PN, & BQ ipſius QR;
mixti igitur trianguli ANB centrum grauitatis erit S, &
trianguli mixti CRB centrum grauitatis T. cum igitur
BP, BQ proportionales æqualibus NB, BR inter ſe
ſint æquales, & ſecta AC bifariam in puncto D; etiam
ijs parallela ST ſecta erit bifariam in puncto H: iungit
autem ST centra grauitatis mixtorum triangulorum AN
B, BRC; compoſiti igitur ex vtroque centrum grauita-
tis erit H. Rurſus quoniam ex quadratura parabolæ, ſe-
miparabola ABD ſeſquitertia eſt trianguli BDA, erit
triangulum BDA ſeſquialterum mixti trianguli ANB:

eadem ratione triangulum BDC, trianguli CRB mi xti erit ſeſquialterum: totum igitur triangulum ABC ſeſquialterum eſt compoſiti ex triangulis mixtis ANB, CRB. Et quoniam quarta pars eſt GH ipſius BD, & DK tertia, DG verò dimidia; qualium duodecim partium æqualium eſt BD, talium erit DK quatuor, & GH trium, & DG ſex, & reliqua KG duarum; ſeſquialtera igitur eſt GH ipſius GK: quare vt triangulum ABC ad compoſitum ex prædictis triangulis mixtis, ita ex contraria parte eſt HG ad GK: cum igitur dicti compoſiti ſit centrum grauitatis H, trianguli autem ABC centrum grauitatis K; erit dicti compoſiti, & trianguli ABC ſimul centrum grauitatis G. Rurſus, quoniam triangulum ABC ſeſquialterum eſt compoſiti ex triangulis mixtis ſupra dictis, & compoſitum ex duabus ſemiparabolis ABD, CBD ſeſquitertium trianguli ABC; crit compoſitum ex triangulis mixtis vnà cum triangulo ABC, quintuplum compoſiti ex portionibus AEB, BFC; hoc eſt vt ex contraria parte LM ad MG: cum igitur G ſit centrum grauitatis compoſiti ex triangulis mixtis, & triangulo ABC, & compoſiti ex portionibus AEB, BFC centrum grauitatis L; erit vtriuſque dicti compoſiti, hoc eſt totius AR parallelogrammi centrum grauitatis L: ſed & punctum G ex primo libro eſt centrum grauitatis parallelogrammi AR; eiuſdem igitur parallelogrammi AR erunt duo centra grauitatis G, L. Quod fieri non poteſt: duarum igitur portionum AEB, BFC ſimul centrum grauitatis erit G. Quod eſt propoſitum.

PROPOSITIO XXIIII.

Omnis figuræ circa axim in alteram partem de ficientis, cuius baſis eſt circulus, vel ellipſis, ſiue-

baſes ſunt circuli, vel ellipſes, reliqua autem ſuperficies tota interius concaua, centrum grauitatis eſt in dimidio axis ſegmento, quod baſim, vel maiorem baſim attingit.

Sit figura circa axim in alteram partem deficiens ABC, cuius axis BD, baſis, vel maior baſis circulus, vel ellipſis circa diametrum AC, reliqua autem ſuperficies tota interius concaua: ſecto autem axe BD bifariam in puncto G, ſit ſolidi ABC centrum grauitatis F nempe in axe BD. Dico punctum F eſſe in ſegmento ED. Secto enim ſolido ABC, & figu ra per axem pla no per punctum E baſi, vel baſibus parallelo, fiat ſectio circulus, vel ellipſis ſimilis baſi, per diffinitionem, & ſectionis diameter K N: deinde figura quædam ex

[Figure 167]

duobus cylindris, vel cylindri portionibus KL, AM circa axes BE, ED, eiuſdem altitudinis circumſcribatur ſolido ABC: ſecanturque bifariam BE in puncto G, & ED in puncto H. totius autem figuræ circumſcriptæ ſit centrum grauitatis O, nempe in axe BD. Quoniam igitur propter bipartitorum axium ſectiones G, H, eſt ſolidi KL centrum grauitatis G: ſolidi autem AM centrum grauitatis H, erit in linea GH totius ſolidi AL centrum grauitatis O, & vt ſolidum AM ad ſolidum KL, ita GO ad OH: ſed maior eſt proportio ſolidi AM ad ſolidum KL

quàm GE, ad EH; maior igitur proportio eſt GO ad OH, quàm GE ad EH: & componendo, maior proportio GH ad HO, quàm eiuſdem GH ad HE; minor igitur OH erit quàm EH, & punctum O propinquius puncto D quàm punctum E; verum quoniam ex ijs, quæ in præcedenti libro demonſtrauimus, propoſitæ figuræ ſolidæ ABC centrum grauitatis eſt puncto D propinquius, quàm cuiuslibet figuræ ex cylindris, vel cylindri portionibus æqualium altitudinum ipſi circumſcriptæ, erit punctum F propinquius puncto D quàm punctum O; multo igitur puncto D erit propinquius punctum F quàm punctum E; ergo infra punctum E, & in linea ED cadet ſolidi ABC centrum grauitatis F. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XXV.

Omnis fruſti coni, vel portionis conicæ centrum grauitatis eſt punctum illud, in quo eius axis ſic diuiditur, vt pars quæ minorem baſim attingit aſſumens quartam partem axis ablati coni, vel portionis conicæ, ſit ad eam, quæ inter poſtremam ſectionem, & quartæ partis abſciſſ<17> ad baſim axis totius coni terminum interijcitur, vt cubus, qui fit ab axe totius, ad cubum qui fit ab axe ablati coni.

Sit coni, vel portionis conicæ ABC fruſtum BDEC, cuius axis FG: conus autem, vel coni portio ablata ADE: ſint centra grauitatis H ſolidi ABC, & K ſolidi ADE, & L fruſti DC: quæ centra præterquam quod

ſunt omnia in axe AG, centrum L cadet infra centrum H, ex ijs, quæ in primo libro demonſtrauimus. Dico eſſe KL ad LH vt cubum ex AG ad cubum ex AF. Quoniam enim ob centra grauitatis K, H, L, eſt vt fruſtum DC ad ſolidum ADE, ita ex contraria parte KH ad HL; erit componendo, vt ſolidum ABC ad ſolidum ADE, ita KL ad LH: ſed vt ſolidum ABC ad ſolidum ADE, ita eſt cubus ex AG ad cubum ex AF: triplicata enim eſt vtraque proportio eiuſdem, quæ eſt ipſius AG ad ipſam AF, propter ſimilitudinem ſolidorum; vt igitur eſt cu bus ex AG ad cubum ex AF, ita erit KL ad LH. Quod demonſtrandum erat.

[Figure 168]

PROPOSITIO XXVI.

Reſidui ſolidi ex cylindro, vel portione cylindrica hemiſphærio, vel hemiſphæroidi circumſcripta, dempto hemiſphærio, vel hemiſphæroide, centrum grauitatis eſt punctum illud, in quo axis ſic diuiditur, vt pars baſim attingens hemiſphærij, vel hemiſphæroidis ſit tripla reliquæ.

Eſto hemiſphærio, vel hemſphæroidi ABC, cuius axis BD, circumſcriptus cylindrus, vel portio cylindrica AF: & ponatur DK ipſius KB tripla. Dico reliqui ex ſoli-

do AF dempto ABC, centrum grauitatis eſſe K. Nam ſuper baſim circulum, vel ellipſim, cuius diameter EF ſimilem, & oppoſitam ſolidi ABC, vel AF baſi, cuius diameter AC, ſtet cylindrus, vel portio cylindrica EDF: vt ſitaxis BD communis quatuor ſolidis ABC, EDF, AF, & reliquæ figuræ dempto ſolido ABC comprehenſæ ſuperficie cylindrica, & circulo, vel ellipſe circa EF, & dimidia ſuperficie ſphærica interiori, cuius figuræ ſolidæ ponimus centrum grauitatis K. Secto igitur axe BD bifariam, & ſingulis eius partibus rurſus bifariam, ductiſque per puncta ſectionum planis quibuſdam planis

[Figure 169]

prædictarum baſium oppoſitarum parallelis, ſecta ſint quatuor prædicta ſolida, quorum, excepto propoſito reſiduo, ſectiones omnes erunt circuli, vel ellipſes inter ſe ſimiles, & in ſolido AF etiam æquales, quarum omnium diametri eiuſdem rationis erunt in eodem plano, in quo ſit parallelogrammum per axim AEFC: ſolidi autem dicti reſidui ſectiones, reſidua ſectionum ſolidi ABC. At circa communes axes inter ſe æquales ſegmenta axis BD, & inter eadem plana parallela, ſuper baſes ſectiones duorum ſolidorum ABC, EDF, cylindri, vel portiones cylindricæ conſiſtant altitudine, & multitudine æquales; ita vt duarum figurarum ex ijs compoſitarum altera ſit cirdumſcripta ſoli-

do EDF, altera ſolido ABC inſcripta. hac igitur ablata ex ſolido AF, figura relinquetur ex reſiduis cylindrorum, vel cylindri portionum altitudine, & multitudine æqualibus ijs cylindris, vel cylindri portionibus, ex quibus conſtat alterutra figurarum ſolidis ABC, DEF circumſcriptarum: eruntque ex ſuperius demonſtratis dicta reſidua, & cylindri vel cylindri portiones, quæ circa ſolidum EDF, inter ſe æqualia proutinter ſe reſpondent inter eadem plana parallela, vt eſt exempli gratia reliquum ſolidi AN dempto ſolido SR, æquale ſolido TP: & ſic deinceps: ſummus autem XF cylindrus, vel portio cylindrica

[Figure 170]

eſt communis: Atqui bina hæc iam dicta ſolida centrum grauitatis habent commune communis bipartiti axis ſectio nem in eadem recta linea BD, in qua eſt etiam ſolidi XF communis centrum grauitatis. duarum igitur dictarum figu rarum ſolido EDF, & prædicto reſiduo circumſcriptarum idem aliquod punctum in axe BD erit commune centrum grauitatis: ſieri autem poteſts quod in ſecundo libro demon ſtrauimus, vt duæ dictæ figuræ ſuperent vnaquæ que ſibi inſcriptam minori ſpacio quantacumque magnitudine propoſita. ex demonſtratis igitur in primo libro; duo ſolida circa axem BD in alteram partem deficientia commune habebunt in axe BD centrum grauitatis: ſed ſolidi, ideſt co-

ni, vel portionis conicæ EDF eſt centrum grauitatis K: reliqui igitur ex cylindro, vel portione cylindrica AF dempto hemiſphærio, vel hemiſphæroide ABC centrum grauitatis erit idem K. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXVII.

Si hemiſphærium, vel hemiſphæroides vna cum cylindro, vel cylindri portione ipſi circumſcripta ſecetur plano baſi parallelo; reliqui ex cylindro, vel portione cylindrica abſciſſa ad partes verticis, dempta illa quæ abſciſſa eſt ſimul minori, & ſphæræ, vel ſphæroidis portione, centrum grauitatis eſt punctum illud, in quo eius axis ſic diuiditur, vt quæ inter hanc poſtremam ſectionem, & centrum baſis vnà abſciſſæ portionis interijcitur, aſſumens quartam partem ſegmenti, quod dictæ baſis, & ſphæræ, vel ſphæroidis centra iungit, ſit ad ſui ſegmentum, quod inter poſtremam ſectionem, & quartæ partis axis hemiſphærij, vel hemiſphæroidis ad verticem abſciſſæ terminum interijcitur, vt cubus axis hemiſphærij, vel hemiſphæroidis, ad cubum eius, quæ baſis portionis & hemiſphærij, vel hemiſphæroidis centra iungit. Reliqui autem ex cylindro, vel portione cylindrica vnà abſciſſa cum reliqua hemiſphærij, vel hemiſphæroidis portione, quæ eſt ad baſim, dempta hac portione centrum, grauitatis eſt punctum illud, quod quartam partem abſcindit axis portionis ad

cius minorem baſim terminatam.

Eſto hemiſphærio, vel hemiſphæroidi ABC, cuius axis BD, baſis circulus vel ellipſis, cuius diameter AC circumſcriptus cylindrus, vel cylindri portio AF, cuius intelligatur reliquum dempto ABC. quæ ſolida ſecans pla num per AC, BD, faciat ſectiones ſemicirculum, vel ſemiellipſim ABC, & parallelogrammum per axem AE FC; & per quodlibet punctum L axis BD, planum baſibus AC, EF ſolidi AF parallelum, ſecans prædicta ſolida ABC, AF, faciat ſectiones circulos, vel ellipſes ſimiles, & in ſolido AF etiam æquales ijs, quæ circa AC, EF: earum autem diametros, ſectiones cum parallelogrammo AEFC, ipſam GO: & cum ſemicirculo, vel ſemiellipſe ABC, ipſam HN. Itaque habebimus figuram quandam ſolidam GHBNO reſiduum cylindri, vel portionis cylindricæ GF dempta minori ſphæræ, vel ſphæroidis portione HBN, cuius axis erit BL. Sumpta igitur BQ quarta parte axis BD, & LP quarta par te ipſius DL fiat vt cu bus ex BD ad cubum ex DL, ita PR ad Rque Dico reſidui GHBNO centrum grauitatis eſſe R. Reliqui autem ex cylindro, vel portione cylindrica AO dempta portione AHNC, centrum grauitatis eſſe P.

[Figure 171]

Nam ſuper baſim circulum, vel ellipſim EF, ſtet conus, vel portio conica EDF: ſitque prædicto plano per L abſciſſus conus, vel coni portio KDM, cuius axis DL, quæ propter planum ſecans baſi EF parallelum, ſimilis erit toti cono, vel portioni conicæ EDF. Quoniam igitur BQ eſt axis BD pars quarta, & LP pars quarta ipſius DL;

erunt centra grauitatis ſolidorum, Q ipſius EDF, & Pipſius DKM. Et quoniam ſolidum DEF ad ſolidum D KM eſt vt cubus ex BD ad cubum ex DL, hoc eſt vt ſolidum EDF ad ſolidum KLM, & vt PR ad Rque erit diuidendo, vt fruſtum EKMF ad ablatum KDM, ita ex contraria parte PQ ad QR: cum igitur ſint centra grauitatis P ſolidi DKM, & Q ſolidi DET; erit reliqui fruſti EKMF centrum grauitatis R: ſed qua ratione in præcedenti conſtat, reliqui ex ſolido AF, dempto ſolido ABC centrum grauitatis eſſe Q, eadem concluditur idem eſſe centrum grauitatis reliqui ex ſolido GF, dempta portione HBN, quod & fruſti EKMF, nempe punctum R: Et quoniam P eſt centrum grauitatis coni, vel portionis conicæ KDM, crit idem P centrum grauitatis ieliqui ex cylindro, vel portione cylindrica AO dempta portione AHNC. Manifeſtnm eſt igitur propoſituro.

PROPOSITIO XXVIII.

Ijſdem poſitis ſolidis, vt in antecedenti, ſectisque per duo quælibet puncta axis duplici plano baſi parallelo, reliqui ex cylindro, vel portione cylindrica dictis duobus planis intercepta dempta ſphæræ, vel ſphæ roidis portione ipſi inter eadem plana reſpondente, centrum grauitatis eſt punctum illud, in quo eius axis ſic diuiditur, vt quæ inter hanc poſtremam ſectionem, & centrum maioris baſis vnà abſciſsæ portionis interijcitur, aſſumens quartam partem ſegmenti, quod prædictæ baſis, & ſphæræ vel ſphæroidis centra iungit,

ſit ad ſui ſegmentum, quod inter poſtremam ſectio
nem, & quartæ partis eius, quæ ſphæræ, vel hemi-
ſphærij, & minoris baſis portionis centra iungit
ad minorem baſim abſciſsæ terminum interijci-
tur, vt cubus eius, quæ minoris baſis, & ſphæræ,
vel ſphæroidis, ad cubum eius, qu<17> ſphæræ, vel ſphæ
roidis, & maioris baſis portionis centra iungit.

Ijſdem poſitis ſolidis, vtque in antecedenti ponebantur
ABC, AF; per duo quælibet puncta RQ axis BD ſe-
centur poſita ſolida duobus planis baſi, quæ circa AC, cir
culo ſcilicet, vel ellipſi parallelis: quibus planis intercepta
hemiſphærij, vel hemiſphæroidis portio ſit MOPN, vnà
cum cylindro, vel portione cylindrica GL parte ipſius AF,
quorum ſolidorum commu
nis axis vnà abſciſſus
ab axe BD ſolidi AB
C, ſit RQ: & ſumptis
quartis partibus RI ip-
ſius DR, & QZ ipſius
DQ, fiat vt cubus ex
DQ ad cubum ex D
R, ita IY ad YZ.
Dico reliqui ex cylin-

[Figure 172]

dro, vel portione cylindrica GL dempta portione MOP
N, centrum grauitatis eſſe Y. Facta enim conſtructione
coni, vel portionis conicæ EDF, vt in ſuperioribus, erunt
ſimilium conorum, vel coni portionum SDT, VDX, ea-
dem ordine axes DQ, DR: propter igitur factas diuiſio-
nes, erunt centra grauitatis Z ſolidi SDT & I ſolidi VDX,
& demonſtratio ſimilis antecedenti. dicti igitur reſidui
GMOPMH centrum grauitatis Y. Quod eſt propo-
ſitum.

PROPOSITIO XXIX.

Si ſphæra, vel ſphæroides vnà cum cylindro, vel portione cylindrica ipſi circumſcripta ſecetur plano, haud per centrum, baſibus ſolidi circumſcripti parallelo; reliqui ex cylindro, vel portione cylindrica ad maioris portionis ſphæræ, vel ſphæroidis partes abſciſſa, dempta ſphæræ, vel ſphæroidis maiori portione, centrum grauitatis eſt punctum illud, in quo dicti reliqui ſolidi axis ſegmentum inter duas quartas partes extremas ſegmentorum eiuſdem axis, quæ à centro ſphæræ, vel ſphæroidis fiunt interiectum, ſic diuiditur, vt pars propinquior baſi ſit ad reliquam, vt prædictorum, quæ à centro fiunt axis ſegmentorum maioris cubus ad cubum minoris.

[Figure 173]

Sit ſphæræ, vel ſphæroidi ABCD cuius centrum E, circumſcriptus cylindrus, vel portio cylindrica FGHK, cum quibus planum per axim communem BED, faciat ſectiones, parallelogrammum per axim FG HK, & circulum, vel ellipſim ABCD: quas figuras vnà cum dictis ſolidis ſecans planum baſibus ſolidi circumſcripti paralle-

lum per quoduis punctum S dimidij axis ED, faciensque ſectiones circulos, vel ellipſes ſimiles ſcilicet baſibus oppoſitis ſolidi FH, & ſectionum diametros LM, TV, abſcindat ſolidi ABCD maiorem portionem LBM, & ſolidi FH cylindrum, vel portionem cylindricam TH, cuius axis BES: duorum autem ſegmencorum BE, ES ſumptis duabus quartis partibus extremis BQ PS, fiat vt cubus ex BE ad cubum ex ES, ita PR ad RQ. Dico reliquæ figuræ ex cylindro, vel portione cylindrica TH, portioni LBM circumſcripta, dempta portione LBM, centrum grauitatis eſſe R. Sectis enim parallelogrammo TH, & ſolidis LBM, TH, plano per centrum E, baſibus ſolidi TH parallelo, ſit ſectio, (vna enim communis erit vtrique ſolido) circulus, vel ellipſis, cuius diameter AEC in parallelogrammo T H diametris TV, GH oppoſitarum baſium parallela. Tum ſuper baſes oppoſitas circulos, vel ellipſes circa GH, FK ſtent coni, vel portiones conicæ GEH, FEK: & planum per TV baſi circa FK parallelum abſcindat à ſolido FEK conum, vel coni portionem NEO ſimilem vtique ipſi FEK, hoc eſt

[Figure 174]

ipſi GEH, propter ſimiles baſes, & ſimilia triangula per axim in eodem parallelogrammo FH. Solidi itaque NEO, ex ijs, quæ in primo libro demonſtrauimus, centrum grauitatis erit P; quemadmodum & Q ſolidi NEO. Quoniam igitur tàm ſolidi GEH ad ſolidum NEO propter ſimilitudinem, quàm cubi ex BE

ad cubum ex ES, triplicata eſt proportio axis, vel la-
eris BE, ad axem, vel latus ES; erit vt cubus ex BE
ad cubum ex ES, ita ſolidum GEH ad ſolidum NEO,
hoc eſt in eadem proportione, quæ eſt ex contraria parte ip-
ſius PR ad RQ. Cum igitur P ſit centrum grauitatis
ſolidi NEO, & Q ſolidi GEH; erit compoſiti ex vtro-
que centrum grauitatis R. Rurſus, quoniam reliquum ſo-
lidi AH dempto hemiſphærio, vel hemiſphæroide ABC,
æquale eſt ſolido GEH: & reliquum ſolidi TC dempto
ſolido ALMC æquale ſolido NEO; erit vt ſolidum
GEH ad ſolidum NEO, ideſt ex contraria parte, vt PR
ad RQ, ita reliquum ſolidi AH dempto ABC, ad re-
liquum ſolidi TC, dempto ALMC: ſed reliqui ex ſoli-
do AH dempto ABC eſt centrum grauitatis Q: & reli-
qui ex ſolido TC dempto ALMC, centrum grauitatis
P, ex ſuperius demonſtratis; totius igitur reliqui ex cy-
lindro, vel portione cylindrica TH dempta ſphæræ, vel
ſphæroidis maiori portione LBM centrum grauitatis eſt
R. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XXX.

Si ſphæra, vel ſphæroides vnà cum cylindro,
vel portione cylindrica ipſi circumſcripta, ſece-
tur duobus planis baſi ſolidi circumſcripti pa-
rallelis, centrum intercipientibus, & ab eo non
æqualiter diſtantibus; reliqui ex cylindro, vel
portione cylindrica dictis planis intercepta, dem-
pta portione ſphæræ, vel ſphæroidis ipſi reſpon-
dente, centrum grauitatis eſt punctum illud, in
quo prædicti reliqui ſolidi axis ſegmentum in-

ter quartas partes extremas eiuſdem axis ſegmentorum, quæ à centro ſphæræ, vel ſphæroidis fiunt interiectum ſic diuiditur, vt pars maiori baſi propinquior ſit ad reliquam, vt prædictorum axis ſegmentorum cubus maioris ad cubum minoris.

Ijſdem poſitis, & conſtructis, quæ in antecedenti, rurſus per quodlibet axis BE punctum X, ductum planum baſibus ſolidi FH parallelum, ſecansque vnà cylindrum, vel portionem cylindricam FH, & ſphæram, vel ſphæroides ABCD: eſto duobus planis per TV, ZY, inter ſe parallelis, & centrum E intercipientibus abciſſa ſphæræ, vel ſphæroidis portio L δ ε M vnà cum cylindro, vel portione cylindrica TY: & ſumatur ipſius EX pars quarta XQ, qualis eſt & PS ipſius E S: & vt eſt cubus ex EX ad cubum ex ES, ita fiat PR ad Rque Dico reliqui ex cylindro, vel portione cylindrica TY dempta ſphæræ, vel ſphæroidis portione L δ ξ M, centrum grauitatis eſſe R. Eſto enim conus, vel coni portio θ E λ abſciſſa prædicto plano per ZY, & communibus axibus ES, EX, ſimili igitur demonſtratione antecedentis manifeſtum eſt quod proponebatur.

[Figure 175]

Hemiſphærij, vel hemiſphæroidis centrum grauitatis eſt punctum illud, in quo axis ſit diuiditur, vt pars ad verticem ſit ad reliquam vt quinque ad tria.

Eſto hemiſphærium, vel hemiſphæroides ABC, cuius axis BD, baſis circulus, vel ellipſis, cuius diameter AD C: ſitque ſolidi ABC centrum grauitatis G, nempe in axe BD. Dico BG ad GD eſſe vt quinque ad tria. Nam circa axim BD ſuper baſim circulum, vel ellipſim circa AC, ſtet circumſcriptus ſolido ABC cylindrus, vel portio cylindrica AE, & ſecta BD bifariam in F, rurſus FB bifariam ſecetur in puncto H. Quoniam igitur ſolidum ABC eſt ſolidi AE, ſubſeſquialterum, erit di-

[Figure 176]

uidendo ſolidum ABC reliqui ex ſolido AE duplum cum igitur ſint centra grauitatis, G ſolidi ABC, & H prædicti reliqui, & F totius AE; quo fit vt ex contraria parte ſit vt ſolidum ABC ad prædictum reſiduum, ita HF ad FG, erit HF dupla ipſius FG; quadrupla igitur BF ipſius FG: ſed talium quatuor partium eſt BF, qualium BD eſt octo, cum ſit BF dimidia ipſius BD; qualium igitur octo eſt BD, talium erit BG quinque, & GD trium. Quod demonſtrandum erat.

Dico hemiſphærij, vel hemiſphæroidis ABC centrum grauitatis eſſe G. In plano enim ſemicirculi, vel ſemiellipſis per axem BD deſcriptæ intelligantur duæ parabolæ, quarum diametri AD, DC, & communiter ad vtranque ordinatim applicata ſit BD: & connectuntur rectæ AB, BC: ſumptis autem in BD tribus quibuslibet punctis, æqualia axis ſegmenta XF, FY intercipientibus, ſecent per ea puncta tres figuras hemiſphærium, vel hemiſphæroides ABC, & ſemicirculum, vel ſemielli-

[Figure 177]

pſim per axem, & figuram planam ARBSC, quæ lineis parabolicis ARB, BSC, & recta AC continetur, plana quædam baſi hemiſphærij, vel hemiſphæroidis parallela. Erunt igitur ſectiones hemiſphærij, vel hemiſphæroidis circuli, vel ellipſes ſimiles baſi, quarum diametri ſint KXH, LFM, NϒO: figuræ autem ARBSC ſectiones rectæ lineæ PXQ, RFS, TYV. Quoniamigitur per IV huius eſt vt KH ad LM potentia, ita KQ ad FS hoc eſt in earum duplis PQ ad RS longitudine; erit vt PQ ad RS, ita circulus, vel ellipſis KH ad circulum vel ſimilem ellipſim LM. Eadem ratione erit vt RS ad TV, ita circulus, vel ellipſis LM ad circulum, vel

ellipſim NO. minor autem proportio eſt PQ ad RS, quàm RS ad TV circuli igitur, vel ellipſis KH ad circulum, vel ellipſim LM, minor erit proportio <34> circuli, vel ellipſis LM ad circulum, vel ellipſim NO: & duæ figuræ hemiſphærium, vel hemiſphæroides ABC, & plana ARBSC, ſunt circa axim, vel diametrum BD in alteram parte m deficientes, quales definiuimus; vtriuſque igitur dictæ figuræ vnum erit commune centrum grauitatis. Rurſus poſito puncto F in medio axis BD, & FG ipſius GE tripla, quoniam ponitur BG ad GD vt quinque ad tria; qualium partium æqualium ipſi EG eſt FG trium, talium erit BG quindecim, & GD nouem, & talis EG vna: dempta igitur GE ab ipſa DG, & addita ipſi BG, qualium partium eſt BE ſexdecim, talium erit ED octo; dupla igitur BE ipſius ED, & trianguli ABC centrum grauitatis E. Rurſus quoniam ex quadratura parabolæ, duarum portionum ARB, BSC triangulum ABC eſt triplum; hoe eſt vt FG ad GE, ita ex contraria parte triangulum ABC ad duas portiones ARB, BSC: Sed trianguli ABC eſt centrum grauitatis E, & duarum portionum ARB, BSC ſimul per XXIII huius, centrum grauitatis F, totius igitur figuræ ARBSC centrum grauitatis erit G, commune autem hoc centrum grauitatis eſt hemiſphærio, vel hemiſphæroidi ABC. Manifeſtum eſt igitur propoſitum.

PROPOSITIO XXXII.

Omnis minoris portionis ſphæræ, vel ſphæroidis centrum grauitatis eſt in axe primum bifariam ſecto: deinde ſecundum centrum grauitatis reliqui ſolidi dempta portione ex cylindro, vel

portione cylindrica abſciſſo, vel abſciſſa vnà cum portione, ex cylindro, vel portione cylindrica, ſphær<17>, vel ſphæroidis circa axim axi portionis com gruentem circunſcripta; in eo puncto, in quo dimidius axis portionis baſim attingens ſic diuiditur, vt pars prima, & ſecunda ſectione terminata, ſit ad totam ſecunda, & poſtrema ſectione terminatam, vt rectangulum contentum axe portionis, & reliquo ſphæræ, vel ſphæroidis dimidij axis ſegmento, vnà cum duabus tertijs quadrati axis portionis, ad ſphæræ, vel ſphæroidis dimidij axis axi portionis congruentis quadratum.

Sit ſphæræ, vel ſphæroidis minor portio ABC, cuius axis BD: & in eo centrum grauitatis F: ſecto autem axe BD primum bifariam in puncto G, & rur ſus BG in puncto H centro grauitatis reliqui dempta portione ex cylindro, vel portione cylindrica KL circa axim BD, abſciſſo, vel abſciſſa codem plano cum

[Figure 178]

portione ABC, & cylindro, vel portione cylindrica, quæ circumſcriberetur ſphæræ, vel ſphæroidi, cuius eſt portio ABC, circa axim, cuius dimidium BDE. Dico GH ad HF, (nam cadet centrum F infra bipartiti axis BD ſectionem G, ex XXIII huius) eſſe vt rectangulum BDE vnà cum duabus tertijs BD quadrati ad quadratum BE. Quoniam enim totius ſolidi KL cen-

trum grauitatis eſt G, & F portionis ABC, & H reliqui ex KL dempta ABC portione; erit vt portio ABC ad prædictum reſiduum, ita ex contraria parte HG ad GF: & componendo, vt ſolidum KL ad prædictum reſiduum, ita HF ad FG: & per conuerſionem rationis, vt ſolidum KL ad portionem ABC, ita FH ad HG: & conuertendo, vt portio ABC ad ſolidum KL, ita GH ad HE: ſed vt portio ABC ad ſolidum KL, ita eſt rectangulum BDE vnà cum duabus tertiis quadrati BD ad quadratum EB; vt igitur rectangulum BDE, vnà cum duabus tertiis quadrati BD, ad quadratum EB, ita erit GH ad HF. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XXXIII.

Omnis portionis ſphæræ, vel ſphæroidis abſciſſæ duobus planis parallelis, altero per centrum acto, centrum grauitatis eſt in axe primum bifariam ſecto: deinde ſumpta eius quarta parte ad minorem baſim; in eo puncto, in quo dimidius axis maiorem baſim attingens ſic diuiditur, vt pars axis prima, & ſecunda ſectione terminata, ſit ad eam, quæ prima, & poſtrema ſectione terminatur, vt rectangulum contentum ſphæræ, vel ſphæroidis axis axi portionis congruentis ijs ſegmentis, quæ fiunt à centro minoris baſis portionis, vnà cum duabus tertiis quadrati axis portionis; adſphæræ, vel ſphæroidis dimidij axis quadratum.

Sit ſphæræ, vel ſphæroidis cuius centrum E portio

ABCD abſciſsa duobus planis parallelis altero ducto per E, & ſectionem faciente circulum maximum, vel ellipſim per centrum, cuius diameter AED: axis autem portionis ſit EF, cui congruens ſphæræ, vel ſphæroidis axis GFER: ſit autem FE bifariam ſectus in puncto H: & FH bifariam in puncto K, ſitque in EH, ſic enim erit, portionis ABCD centrum grauitatis L. Dico eſſe HK ad KL, vt rectangulum GFR, vnà cum duabus tertiis quadrati EF ad quadratum EG. Sit enim cylindrus, vel portio cylindrica AM circa axim FE abſciſſa ijſdem planis cum portione ABCD, ex cylindro, vel portione cylindrica circa axim GR ſphæræ, vel ſphæroidi AGDR circumſcripta. Quoniam igitur ſolidi AM eſt centrum grauitatis H: reliqui autem dempta ABCD portione centrum grauitatis K: & portionis ABCD ponitur centrum grauitatis L; erit

[Figure 179]

vt portio ABCD ad reliquum ſolidi AM, ita ex contraria parte KH ad HL. componendo igitur vt in antecedenti, & per conuerſionem rationis, & conuertendo, erit vt portio ABCD ad ſolidum AM; hoc eſt vt rectangulum GFR, vnà cum duabus tertiis quadrati EF ad quadratum EG, ita HK ad KL. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XXXIIII.

Omnis portionis ſphæræ, vel ſphæroidis abſciſſæ duobusplanis parallelis, neutro per centrum acto, nec centrum intercipientibus, centrum grauitatis eſt in axe, primum bifariam ſecto: deinde ſecundum centrum grauitatis reliqui dempta portione ex cylindro, vel portione cylindrica, abſciſſo, vel abſciſſa vnà cum portione à cylindro, vel portione cylindrica ſphæræ, vel ſphæroidi circa eius axem axi portionis congruentem circumſcripta; in eo puncto, in quo dimidius axis portionis maiorem baſim attingens ſic diuiditur, vt pars prima & ſecunda ſectione terminata ſit ad eam, quæ prima, & poſtrema ſectione terminatur, vt duo rectangula, alterum contentum duobus ſphæræ, vel ſphæroidis axis axi portionis congruentis ijs ſegmentis, quæ fiunt à centro minoris baſis portionis: alterum axe portionis, & ſegmento, quod ſphæræ, vel ſphæroidis, & maioris baſis portionis centra iungit, vnà cum duabus tertiis quadrati axis portionis, ad ſphæræ vel ſphæroidis dimidij axis quadratum.

Sit ſphæræ, vel ſphæroidis, cuius centrum E portio ABCD, abſciſſa duobus planis parallelis, neutro per E tranſeunte, nec E intercipientibus: portionis autem axis ſit FS: maior baſis circulus, vel ellipſis, cuius diame-

ter AD: & circa axim EF, ſtet cylindrus, vel portio cylindrica MN abſciſſa ijſdem planis cum portione ABCD ex cylindro, vel portione cylindrica, ſphæræ, vel ſphæroidi BCR circa eius axim CFSR circumſcripta, cuius ſit centrum grauitatis H, ac propterea ſecta FS bifariam in puncto H. reliqui autem dempta portione ABCD ex ſolido MN ſit centrum grauitatis K, quod cadet in FH, & portionis ABCD centrum grauitatis in ipſa HS cadet, quod ſit L. Dico eſſe HK ad KL, vt duo rectangula GFR, FSE, vnà cum duabus tertiis quadrati FS, ad quadratum EG. Quoniam enim

[Figure 180]

ſimiliter vt ante oſtenderemus eſſe HK ad KL, vt eſt portio ABCD ad ſolidum MN: ſed portio ABCD ad ſolidum MN, eſt vt duo rectaugula GFR, ESF, vnà cum duabus tertiis quadrati FS, ad quadratum EG; vt igitur duo prædicta rectangula, vnà cum duabus tertiis quadrati FS ad quadratum EG, ita erit HK ad KL. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXV.

Omnis maioris portionis ſphæræ, vel ſphæroidis centrum grauitatis eſt in axe, primum bifariam ſecto: deinde ſecundum centrum grauitatis reliqui dempta portione ex cylindro, vel portione

cylindrica, abſciſſo, vel abſciſſa vnà cum portio-
ne, à cylindro, vel portione cylindrica, ſphæræ, vel
ſphæroidi circa eius axim axi portionis congruen-
tem circumſcripta; in eo puncto, in quo axis portio
nis ſic diuiditur, vt pars prima, & ſecunda ſectione
terminata ſit ad eam, quæ prima & poſtrema ſe-
ctione terminatur, vt ſolidum rectangulum ex axe
portionis, & reliquo ſegmento axis ſphæræ, vel
ſphæroidis axi portionis congruentis, & eo, quod
ſphæræ, vel ſphæroidis, & baſis portionis centra
iungit, vnà cum binis tertijs duorum cuborum; &
eius, qui à ſphæræ, vel ſphæroidis axis fit dimi-
dio: & eius, qui ab ea, quæ ſphæræ, vel ſphæroidis,
& baſis portionis centra iungit; ad ſolidum rectan
gulum, quod duobus ſphæræ, vel ſphæroidis præ-
dicti axis dimidijs, & axe portionis continetur.

[Figure 181]

Sit ſphæræ, vel ſphæ
roidis, cuius centrum
E maior portio ABC,
cuius axis BD, baſis
circulus, vel ellipſis, cu
ius diameter AC: &
circa axem BD ſtet
cylindrus, vel portio
cylindrica KL, abſciſ
ſa eodem plano cum
portione ABC, ex cy-
lindro, vel portione cy
lindrica, ſphæræ, vel
ſphæroidi ABCR circa eius axim BDR circumſcripta,

& ſecta BD bifariam in puncto H: deinde ſecundum G in ipſa BH, centrum grauitatis reliqui dempta portione ex ſolido KL, ſit portionis ABC in ipſa DH centrum gra uitatis F, per vim XXXVII ſecundi. Dico eſſe HG ad GF, vt ſolidum rectangulum ex BD, DR, DE vnà cum binis tertiis duorum cuborum ex BE, ED, ad ſoli- dum rectangulum ex BD, BE, ER. Simi liter enim vt ſupra de- monſtrato eſſe vt HG ad GF, ita portionem ABC ad ſolidum KL; quoniamportio ABC ad ſolidum KL eſt vt ſolidum ex BD, DR, DE, vnà cum binis ter tiis duorum cuborum ex BE, & ED, ad ſoli-

[Figure 182]

dum ex BD, BE, ER; erit vt modo dicta antecedens magnitudo ad dictam conſequentem, ita HG, ad GF. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XXXVI.

Omnis portionis ſphæræ, vel ſphæroidis ab- ſciſſæ duobus planis parallelis centrum interci- pientibus, & ab eo non æqualiter diſtantibus, cen trum grauitatis eſt in axe, primum bifariam ſecto: deinde ſecundum centrum grauitatis reliqui dem- pta portione ex cylindro, vel portione cylindrica, abſciſſo, vel abſciſſa vnà cum portione, à cylin-

dro, vel portione cylindrica, ſphæræ, vel ſphæroi-
di circa eius axim axi portionis congruentem cir-
cumſcripta; in eopuncto, in quo maius ſegmen-
tum axis portionis corum, quæ à centro fiunt ſic
diuiditur, vt pars prima & ſecunda ſectione termi
nata ſit ad eam, quæ prima, & poſtrema ſectione
terminatur, vt duo ſolida rectangula; & quod fit
ex duobus ſphæræ, vel ſphæroidis axis axi portio-
nis congruentis ijs ſegmentis, quæ fiunt à centro
maioris baſis portionis, & ea, quæ maioris baſis
& ſphæræ, vel ſphæroidis centra iungit: & quod
ex ſphæræ, vel ſphæroidis eiuſdem axis ſegmentis
à centro minoris baſis factis, & ea, quæ minoris ba
ſis, & ſphæræ, vel ſphæroidis centra iungit, vnà
cum binis tertiis partibus duorum cuborum exijs
ſegmentis axis portionis, quæ à centro ſphæræ,
vel ſphæroidis fiunt; ad ſolidum rectangulum quod
duobus ſphæræ, vel ſphæroidis prædicti axis dimi
dijs, & axe portio-
nis continetur.

[Figure 183]

Sit ſphæræ, vel ſphæ
roidis, cuius centrum
E, portio ABCD, ab
ſciſſa duobus planis pa
rallelis centrum E in-
tercipientibus, & ab eo
non æqualiter diſtan-
tibus: axis autem por-
tionis ſit GH: maior

baſis circulus, vel cllipſis, cuius diameter AD. minor autem, cuius diameter ABC: & circa axim GH, ſtet cylindrus, vel portio cylindrica NO, abſciſſa ijſdem planis cum portione ABCD, ex cylindro, vel portione cylindrica ſphæræ, vel ſphæroidi BCR circa axim FGHR circumſcripta, cuius ſit centrum grauitatis K, ſectio ſcilicet bipartiti axis GH: reliqui autem ex ſolido NO dempta portione, ſit centrum grauitatis L, nempe in axis GH ſegmento GK, quod minorem portionis baſim attlngit: portionis autem ABCD ſit centrum grauitatis M: quod quidem in reliquo ſegmento KH cadet. Dico eſſe KL ad LM, vt duo ſolida rectangula ex FH, HR, EH, & ex RG, GF, GK, vnà cum binis tertiis duorum cuborum ex EG, EH; ad ſolidum

[Figure 184]

rectangulum ex GH, EF, ER. Similiter enim vt ſupra demonſtrato eſſe vt KL ad LM, ita portionem ABCD ad ſolidum NO; quoniam portio ABCD ad ſolidum NO, eſt vt duo ſolida rectangula ex GH, HR, EH, & ex RG, GF, EG, vnà cum binis tertiis duorum cuborum ex EH, EG ad ſolidum ex GH, EF, ER, erit vt totum iam dictum antecedens ad dictum conſequens, ita KL ad LM. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XXXVII.

Omnis portionis conoidis parabolici centrum grauitatis eſt punctum illud, in quo axis ſic diuiditur, vt pars quæ ad verticem ſit eius, quæ ad baſim dupla.

PROPOSITIO XXXVIII.

Omnis fruſti portionis conoidis parabolici centrum grauitatis eſt punctum illud, in quo axis ſic diuiditur, vt pars minorem baſim attingens ſit ad reliquam, vt duplum maioris baſis vnà cum minori, ad duplum minoris, vnà cum maiori.

Harum proportionum vtriuſque non alia demonſtratio eſt ab ea, quam in ſecundo ſcripſimus de centro grauitatis conoidis parabolici, & eius fruſti: propterea quod omnis portionis conoidis parabolici, ſicut & hyperbolici ſectio baſi parallela ellipſis eſt ſimilis baſi. Ex corollario xv. de conoidibus, & ſphæroidibus Archimedis.

PROPOSITIO XXXIX.

Omnis conoidis hyperbolici, vel portionis hyperbolici conoidis centrum grauitatis, eſt punctum illud, in quo duodecima pars axis ordine quarta ab ea, quæ baſim attingit, ſic diuiditur, vt pars propinquior baſi ſit ad reliquam vt ſeſquial-

tera tranſuerſi lateris, hyperboles per axem, ad axem conoidis.

[Figure 185]

Sit conoides hyperbolicum, vel portio conoidis hyperbolici ABC, cuius axis BD, qui in portione non erit ad baſim perpendicularij: baſis autem dicti conoidis, vel portionis ſit circulus, vel ellipſis, cuius diameter ADC: & hyperboles ABC, quæ vel conoides deſcribit, vel eſt ſectio tantummodo per axem, cuius tranſuerſum latus ſit BE, &

huius ſeſquialtera BEF: & ſumpta axis BD quarta parte DF, & tertia DG: qua ratione erit FG duodecima pars axis BD quarta ab ea, cuius terminus D; fiat vt IB ad BD, ita FH ad HG. Dico conoidis, vel portionis ABC centrum grauitatis eſſe H. Nam vt eſt EB ad BD ita fiat DK ad KA: & ponatur KDY ſeſquialtera ipſius DK, & ex AK abſcindatur KM ſubſeſquialtera ipſius AK: & ipſis DK DM, DA, æquales eodem ordine abſcindantur DL, DN, DC: & deſcribantur triangula, KBL, MBN: & per puncta ABC vertice communi B, tranſeant duæ ſectiones parabolæ AOB, & BPC, ita vt contingat recta BK parabolam AOB, recta autem BL parabolam BPC; ſit autem AKLC, parabolarum diametris parallela,. Deinde ſecto axe BD bifariam, & ſingulis eius partibus rurſus bifariam in quotlibet partes æquales, ſint ex illis duæ partes DQ, QF: & per puncta QF planis quibuſdam baſi parallelis ſecentur vnà ſolidum & hyperbole ABC: ſintque hyperboles ſectiones, quæ continent ſectiones trian gulorum ABC mixti, & rectilinei KBL, rectæ RTX ZVS: αγεζδβ. ſolidi autem ABC ſectiones erunt circuli, vel ellipſes ſimiles baſi circa diametros RS, αβ. Quoniam igitur eſt vt ϒK ad KD, ita AK ad KM; vtrobique enim eſt proportio ſeſquialtera: erit permutando vt YK ad AK, hoc eſt vt IB ad BD, vel FH, ad HG, ita DK ad KM, hoc eſt triangulum BDK ad triangulum BKM, hoc eſt ad æquale huic ex demonſtratis triangulum AKB mixtum: hoc eſt in duplis ita, triangulum BKL ad duo mixta rriangula AKB, BLC ſimul. ſed duorum triangulorum AKB, BLC ſimul eſt centrum grauitatis F, vt in hoc tertio libro demonſtrauimus: trianguli autem BKL, vt in primo, centrum grauitatis G; totius igitur trianguli ABC centrum grauitatis erit H. Rurſus quoniam eſt vt BD ad BQ hoc

eſt vt rectangulum EBD ad rectangulum EBQ, ita DK ad QX: & vt quadratum BK ad quadratum BX, hoc eſt vt quadratum BD ad quadratum BQ, ita eſt AK ad TX; erunt octo magnitudines quaternæ propor-

[Figure 186]

tionales; ſed & earum primæ, & tertiæ ſunt proportionales; nam eſt vt EB ad BD, hoc eſt vt rectangulum EBD prima in primis ad quadratum BD primam in ſecundis, ita DK tertia in primis ad AK tertiam in ſecundis; vt

igitur compoſita ex primis vtriuſque ordinis ad compoſitam ex ſecundis, ita erit compoſita ex tertiis ad compoſitam ex quartis; videlicet vt rectangulum BDE, quod æquale eſt rectangulo EBD vna cum quadrato BD, ad rectangulum BQE, quod æquale eſt rectangulo EBQ vnà cum quadrato BQ, ita erit tota AD ad totam TQ. Sed vt rectangulum BDE ad rectangulum BQE ita eſt AD quadratum, ad quadratum RQ, hoc eſt ita circulus, vel ellipſis circa AC, ad circulum, vel ſimilem illi ellipſem circa RS; vt igitur AD ad TQ, hoc eſt in earum duplis vt AC ad TV, ita erit circulus, vel ellipſis circa AC ad circulum, vel ellipſem circa RS. Similiter oſtenderemus eſſe vt AC ad γδ, ita circulnm, vel ellipſim circa AC, ad circulum, vel ellipſem, circa αβ: conuertendo igitur, & ex æquali erunt binæ in eadem proportione, vt γδ ad TV, ita circulus, vel ellipſis circa αβ ad circulum, vel ellipſim circa RS: & vt TV ad AC, ita circulus, vel ellipſis circa RS ad circulum, vel ellipſim circa AC. Rurſus, quoniam tres rectæ lineæ incipienti à minima γε, TX, AK ſunt binæ ſumptæ proportionales quadratis ex Bε, BX, BK, hoc eſt quadratis ex Fε, QX, DK; duplicata erit proportio γε ad TX ipſius Fε ad QX, & TX ad AK duplicata ipſius QX ad DK: ſed rectæ Fε, QX, DK, ſeſe æqualiter excedunt, vtpote proportionales ipſis BF, BQ, BD, propter ſimilitudinem triangulorum; minor igitur proportio erit γF ad TQ, quàm TQ ad AD: quare his proportionalium minor erit proportio circuli, vel ellipſis circa αβ ad circulum, vel cllipſim circa RS, quàm circuli, vel ellipſis circa RS, ad circulum, vel ellipſim, circa AC. Similiter quæcumque ſectiones per prædicta axis, vel diametri BD puncta ſectionum fierent vt dictum eſt ad verticem retrocedenti oſtenderentur quælibet ternæ inter ſe proximæ, binæque ſumptæ vtriuſque ordinis proportio-

nales eſſe, & minor proportio vtrobique minimæ ad mediam quàm mediæ ad maximam; per XXXII igitur ſecundi, triangulum mixtum, & ſolidum ABC, in huius axe illius autem diametro BD commune habebunt cen-

[Figure 187]

trum grauitatis. ſed demonſtrauimus H centrum grauitatis trianguli ABC; conoidis igitur vel portionis ABC centrum grauitatis erit idem H. Quod demonſtrandum erat.

Et hic huius tertij Libri finis eſſet; niſi ſecundo iam impreſſo, alia quædam via magis naturalis me ad conoidis hyperbolici centrum grauitatis reduxiſſet. Ea igitur in ſecundum librum aliàs inferenda, nunc in ſequenti appendice ſeptem propoſitionibus expoſita, per ſectionem prædicti conoidis in conoides parabolicum eodem vertice, & circa eundem axim, & reliquam figuram ſolidam, abſque compoſito ex duabus figuris circumſcriptis, quæ ex cylindris componuntur, propoſitum concludat.

APPENDIX.
PROPOSITIO I.

Si ſint octo magnitudines quaternæ totæ, & ablatæ proportionales, fuerint autem, & primarum vtriuſque ordinis ablatæ ad reliquas proportionales; erunt vtriuſque ordinis reliquæ proportionales.

[Figure 188]

Sint octo magnitudines quaternæ proportionales, ac primi quidem ordinis totæ, vt AB ad CD, ita EF ad GH: ſecundi autem ordinis ablatæ, vt B ad D, ita F ad H: ſit autem vt B ad A ita F ad E. Dico & reliquas eſſe proportionales, videlicet vt A ad C, ita E ad G. Quoniam enim componendo, & conuertendo eſt vt A ad AB, ita E ad EF: ſed vt AB ad

CD, ita eſt EF ad GH; erit ex æquali vt A ad CD, ad E ad GH: & conuertendo vt CD ad A, ita GH ad E: & permutando CD ad GH, ita A ad E. Rurſus quoniam eſt vt A ad B ita E ad F: & vt B ad D, ita F ad H; erit ex æquali, vt A ad D ita E ad H: ſed vt CD ad A, ita erat GH ad E; ex æquali igitur erit vt CD ad D ita GH ad H: & permutando vt CD ad GH, ita D ad H, & reliqua C ad reliquam G: ſed vt CD ad GH ita erat A ad E; vt igitur A ad C ita erit E ad G. Quod demonſtrandum erat.

[Figure 189]

PROPOSITIO II.

Si circa datæ hyperboles communem diametrum parabola deſcripta illius baſim ita diuidat, vt quadratum dimidiæ baſis parabole ad reliquum quadrati dimidiæ baſis hyperboles eam habeat proportionem, quam tranſuerſum latus ad diametrum hyperboles; omnes in hyperbole ad diametrum ordinatim applicatas ita ſecabit, vt exceſſus, quibus quadrata in hyperbole applicatàrum ſuperant quadrata in parabola ex ſectione applicatarum, inter ſe ſint vt quadrata diametri partium inter applicatas, & verticem interiectarum.

Eſto hyperbole ABC, cuius diameter BD, tranſuer-

uerſum latus EB. & poſitis in ipſa, BD duobus punctis quibuslibet GH, ordinatim applicentur MG, NH: & circa diametrum BD ſit deſcripta parabola KBL taliter vt ipſius dimidiæ baſis DK quadratum ad reliquum quadrati AD, ſit vt EB ad BD, & rectas MH, NG in infinitum productas ſecet parabola KBL in punctis OP. Dico puncta OP intra hyperbolem cadere: & reliquum quadrati MG dempto quadrato GO ad reliquum quadrati NH dempto quadrato PH, eſſe vt quadratum BG ad quadratum BH. Quoniam enim ponitur vt EB ad BD, hoc eſt vt rectangulum EBD ad quadratum BD, ita quadratum DK ad reliquum quadrati AD, erit componendo, & conueniendo, vt rectam gulum BDE ad rectangulum EBD, ita quadratum AD ad quadratum DK: ſed vt rectangulum BGE ad rectangulum BDE,

[Figure 190]

ita eſt quadratum MG ad quadratum AD; ex æquali igitur, vt rectangulum BGE ad rectangulum EBD, ita eſt quadratum MG ad quadratum DK: ſed vt rectangulum EBD ad rectangulum EBG, ita eſt quadratum DK ad GO quadratum; ex æquali igitur vt rectangulu m BGE ad rectangulum EBG, ita erit quadratum MG ad quadratum GO: ſed rectangulum BGE maius eſt totum parte rectangulo EBG; quadratum igitur MG quadrato GO maius erit, & recta MG maior quàm

GO: ſecat igitur parabola KBL rectam MG in puncto O. Similiter oſtenderemus eandem parabolam ſecare quamcumque aliam in hyperbole ABC ordinatim ad dia metrum applicatarum. Quoniam igitur ſunt octo magni tudines quaternæ totæ, & ablatæ proportionales; ac primi quidem ordinis, vt rectangulum BDE ad rectangulum BGE, ita quadratum AD ad quadratum MG: ſecundi autem ordinis, vt rectangulum EBD ad rectangulum EBG ita quadra tum DK ad quadratum OGD: ſed vt EB ad BD, hoc eſt vt ablata primæ in pri mis rectangulum EB D ad reliquum BD quadratum, ita ponitur ablata primæ in ſe cundis, quadratum D K ad reliquum exceſ ſum, quo quadratum AD ſuperat quadratum DK; vt igitur eſt reliqua primæ ad reliquam ſecundæ in pri-

[Figure 191]

mis, ita erit in ſecundis; videlicet vt quadratum BD ad quadratum BG, ita reliquum quadrati AD dempto quadrato DK, ad reliquum qua rati MG dempto quadrato GO. Similiter oſtenderemus reliquum quadrati AD dempto quadrato DK ad reliquum quadrati NH dempto quadrato PH, eſſe vt quadratum BD ad quadratum BH; conuertendo igitur, & ex æquali erit vt quadratum BG ad quadratum BH, ita reliquum quadra ti MG dempto quadrato GO, ad reliquum quadrati

NH dempto quadrato PH. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO III.

Omne conoides hyperbolicum diuiditur in conoides parabolicum circa eundem axim, & reliquam figuram quandam, ad quam conoides parabolicum eam habet proportionem, quamſeſqui altera tranſuerſi lateris hyperboles, quæ conoides deſcribit, ad axem conoidis.

[Figure 192]

Sit conoides hyperbolicum ABC, cuius axis BD: hyperboles autem, quæ conoides deſcribit tranſuerſum latus EB, cuius ſit ſeſquialtera BEF: & abſciſſa DG, ita vt quadratum ex ipſa ad reliquum quadrati AD ſit vt EB ad BD, vertice B circa diametrum BD deſcripta ſit

parabola GBH, eaque circumducta conoides GBH,
Dico conoides GBH comprehendi à conoide ABC &
eſſe ad illius reliquum, vt FB ad BD. Abſciſſa enim
DK ita potentia ſit ad DG, vt DB ad BE longitudine,
circa axim BD deſcribatur conus KBL: & ſecta BD in
multas partes æquales, ductoſque per ea puncta planis
quibuſdam baſi parallelis, ſecentur tria dicta ſolida, conus
ſcilicet & vtrumque conoides: & ſuper ſectiones circulos
deſcribantur cylindri æqualium altitudinum terni cuca

[Figure 193]

communes axes partes æquales, in quas axis BD diuiſus
fuit, & inter eadem plana parallela: & omnino triplex figura
ex cylindris, quos diximus ſit tribus dictis ſolidis circumſcri
pta: ſintque circa duos axes infimos DM, MN terni cylin-
dri AO, GP, KQ: & proxime ordine ipſis reſpondentes
cylindri TX, SV, RZ, quorum baſes circa diametros
TI, Sβ, Rα, communes ſectiones plani per punctum M,
cum tribus ſolidorum ſectionibus per axem, triangulo ſcili-
cet, parabola, & hyperbole in eodem plano, atque ideo tres

diametri TI, Sβ, Rα, erunt in vna recta linea. Quoniam
igitur eſt vt EB ad BD, ita quadratum DG ad reliquum
quadrati AD, ſecabit parabola GBH omnes in hyperbo-
le ABC ad diametrum ordinatim applicatas, quare conoi
des ABC comprehendet conoides GBH: atque ita para-
bola ſecabit, vt exceſſus quibus quadrata in hyperbole ap-
plicatarum ſuperant partes quadrata in parabola applicata
rum, inter ſe ſint vt quadrata partium diametri BD inter
applicatas & verticem interiectarum, prout vt inter ſe reſpom
dent: vt igitur eſt quadratum BD ad quadratum BM, hoc
eſt vt quadratum DK ad quadratum RM, ita erit reliquum
AD quadrati dempto quadrato DG ad reliquum quadrati
TM dempto quadrato SM, & permutando. Sed quia qua-
dratum DG ad reliquum quadrati AD, & ad quadratum
DK eandem habet proportionem ex vi conſtructionis, reli
quum quadrati AD, dempto quadrato DG æquale eſt
quadrato DK; reliquum igitur quadrati TM dempto qua
drato SM æquale erit quadrato RM: ſi igitur vtriſque ad-
dantur ſingula communia, vnis quadratum DG, alteris
quadratum SM, erit & quadratum AD æquale duobus
quadratis GD, DK, & quadratum TM duobus quadra
tis SM, MR æquale. ſed cum cylindri eiuidem altitudi-
nis inter ſe ſint vt baſes, ſunt vt quadrata, quæ ab eorundem
baſium ſemidiametris fiunt; cylindiusigitur AO æqualis
eſt duobus cylindris GP, KQ: & cylindrus TX duobus
cylindris SΥ, RZ æqualis. Eadem ratio eſt de reliquis
deinceps. Tota igitur figura conoidi ABC circumſcripta,
vtrique ſimul, conoidi GBH, & cono KBL circumſcri-
ptæ æqualis erit. poſſunt autem eæ figuræ ita eſſe dictis ſoli-
dis circumſcriptæ per ea quæ alibi oſtendimus, vt ſuperent
inſcriptas minori ſpacio quantacumque magnitudine pro-
poſita; per tertiam igitur ſecundi, conoides ABC vtrique
ſimul, conoidi GBH, & cono KBL æquale erit. dempto
igitur communi conoide GBH, reliquum ſolidum AGBHC

æquale erit cono KBL. Rurſus quia eſt vt EB ad BD, ita quadratum GD ad quadratum DK, hoc eſt circulus circa GH ad circulum circa KL, hoc eſt conus GBH ſi deſcribatur ad conum KBL: ſed vt FB ad BE ita eſt conoides GBH ad conum GBH; ex æquali igitur erit vt FB ad BD, ita conoides GBH ad conum KBL, hoc eſt ad ſolidum AGBHC. Manifeſtum eſt igitur propoſitum.

COROLLARIVM.

Ex huius Theorematis demonſtratione manifeſtum eſt, ijſdem poſitis cylindros deficientes, ex quibus conſtat exceſſus, quo figura conoidi hyperbolico circumſcripta ſuperat circumſcriptam conoidi parabolico, ita ſe habere, vt quorumlibet trium inter ſe proximorum minor proportio ſit minimi ad medium, quam medij ad maximum: æquales enim ſunt ſinguli ſingulis cylindris, ex quibus conſtat figura cono BKL circumſcripta, qui ſunt inter eadem plana parallela. Quod ſi ita eſt, ſimul illud manifeſtum erit, & ex hoc, & ex ijs, quæ in ſecundo libro demonſtrauimus; prædictum exceſſum ex tot cylindris deficientibus eiuſdem altitudinis, quos diximus componi poſſe, vt ipſius centrum grauitatis in axe BD diſtet à centro grauitatis coni KBL, hoc eſt à puncto in quo axis BD ſic diuiditur, vt pars, quæ ad verticem ſit reliquæ tripla, ea diſtantia, quæ minor ſit quantacum que longitudine propoſita.

PROPOSITIO IIII.

Si conoidi parabolico figura circumſcribatur, & altera inſcribatur ex cylindris æqualium altitudinum, binis circa communes axes ſegmenta axis conoidis, & inter eadem plana parallela, minimo circumſcriptorum ad nullum relato; omnia reſidua cylindrorum figuræ circumſcriptæ demptis figuræ inſcriptæ cylindris, & inter ſe, & minimo cylindro æqualia erunt.

Sit conoidi parabolico ABC, cuius axis BD circumſcripta figura ex quotcumque cylindris æqualium altitudinum, quorum tres deinceps ſint EL minimus ſupremus, & GQ, IR, quorum baſes eodem ordine circuli, quorum ſemidiametri ad parabolæ, quæ figuram deſcribit diametrum BD ordinatim applicatæ ſint EF, GH, IK: & in duplos creſcentibus cylindris circa priorum axium duplos axes BH, IK, HD, & c deinceps quotcumque plures eſsent; ſit conoidi ABC in-

[Figure 194]

ſcripta figura ex cylindris æqualium altitudinum inter ſe, & circumſcriptis. Bini itaque circa communes axes inter eadem plana parallela interijcientur, minimo EL ad nullum

relato: huic autem proximus, & æqualis cylindrorum in-
ſcriptorum ſit NM baſim ipſi communem habens circu-
lum circa EFM: & conſequenti circumſcriptorum GQ
ſit. inſcriptorum æqualis PO baſim habens ipſi commu-
nem circulum circa GHO: ſint autem circulorum qui
ſunt baſes cylindrorum diametri in parabola per axim:
quæ quoniam ſunt communes ſectiones cum parabola per
axim planorum baſi conoidis, & inter ſe parallelorum,
erunt etiam ipſæ inter ſe, & parabolæ baſi AC parallelæ,
earumque dimidiæ vt EF, GH ad diametrum BD or-
dinatim applicatæ. Quoniam igitur in parabola ABC
eſt vt HB ad BF ita quadratum GH ad quadratum
EF, duplum erit
quadratum GH
quadrati EF: qua
re & circulus cir-
ca GO circuli
circa EM at que
adeo cylindrus
GQ cylindri E
L duplus, pro-
pter <17>qualitatem
altitudinum: ſed
& cylindrus NL

[Figure 195]

duplus eſt cylindri EL per conſtructionem; cylindrus igi-
tur GQ æqualis eſt cylindro NL: & ablato communi
NM cylindro, reliquus GQ deficiens cylindro NM
cylindro EL æqualis. Rurſus quia eſt vt KB ad BH,
ita quadratum IK ad quadratum GH, hoc eſt ita IR
cylindrus ad cylindrum GQ: ſed vt HB ad BF ita
erat cylindrus GQ ad cylindrum EL; tres igitur cy-
lindri IR, GQ, EL, tribus lineis BK, BH, BF, eodem
ordine proportionales erunt: ſed tres eædem lineæ ſeſe
æqualiter excedunt; tres igitur dicti cylindri ſeſe æqua-

liter excedent, hoc eſt reliquum cylindri IR dempto cylindro PO æquale erit reliquo cylindri GQ dempto cylindro NM, & reliquum cylindri GQ dempto cylindro NM æquale cylindro EL. Similiter ad reliquos cylindros quotcumque plures eſſent deſcendentes oſtenderemus, omnes exceſſus, quibus cylindri circumſcripti inſcriptos ſuperant ſibi quique reſpondentes inter ſe & cylindro EL æquales eſſe. Manifeſtum eſt igitur propoſitum.

PROPOSITIO V.

Dato conoide hyperbolico, & ipſius conoide parabolico circa eundem axim, quod ad reliquum hyperbolici conoidis eam proportionem habeat, quam ſeſquialtera tranſuerſi lateris hyperboles, quæ conoides deſcribit, ad axim conoidis; fieri poteſt vt conoidi parabolico figuræ quædam inſcribatur, & altera circumſcribantur vt ſupra factum eſt, & hyperbolico alio circumſcribatur omnes ex cylindris æqualium altitudinum multitudine æqualibus exiſtentibus ijs, ex quibus conſtant figuræ conoidibus circumſcriptæ, ita vt exceſſus, quo figura conoidi parabolico circumſcripta inſcriptam ſuperat, quem breuitatis cauſa voco exceſſum primum, ad exceſſum, quo figura conoidi hyperbolico circumſcripta ſuperat circumſcriptam parabolico, quem voco exceſſum ſecundum, minorem habeat proportionem quacumque propoſita.

Sit conoides hyperbolicum ABC, & pars eius parabolicum EBF circa eundem axim BD: & conoides EBF ad reliquum conoidis ABC eam habeat proportionem, quam ſeſquialtera tranſuerſi lateris hyperboles per axim ABC ad axim BD. Dico fieri poſſe quod proponitur. Habeat enim DL ad LB quamcumque proportionem: & conoides ABC reliquo ſolido AEBFC dempto conoi de EBF. ſit conus circa axim BD æqualis GBH: & deſcribatur conus GLH: & ſecta BD bifariam in puncto K, & rurſus BK, KD in multitudine, & longitudine æquales inſcribatur conoidi EBF, & altera cirumſcri-

[Figure 196]

batur, vt in antecedenti factum eſt, figura ex cylindris æqualium altitudinum, ita vt exceſſus, quo circumſcripta ſuperat inſcriptam fit minor cono GLH; & cylindris creſcentibus in latitudinem abſoluatur figura conoidi ABC circumſcripta ex cylindris altitudine, & multitudine æqualibus ijs, qui ſunt circa conoides EBF. Quoniam igitur primus exceſſus eſt minor cono GLH, multo minor crit pars eius communis ſolido AEBFG, quàm conus GLH: ſed ſolidum AEBFC æquale eſt cono GBH; reliquum igitur ſolidi AEBFC dicto communi ablato, maius erit coni GBH reliquo BGLH; minor igitur proportio eſt

primi exceſſus minoris cono GLH, ad dictum reliquum ſolidi AEBFC, quàm coni GLH ad reliquum coni GBH: ſed ſecundus exceſſus maior eſt prædicto reliquo ſolidi AEBFC, ctenim illud comprehendit; multo igitur minor proportio erit primi exceſſus ad ſecundum, quàm coni GLH ad reliquum BGLH, hoc eſt minor proportio quàm DL ad LB: ponitur autem proportio DL ad LB qualiſcumque. Fieri igitur poteſt, quod proponitur.

PROPOSITIO VI.

Omnis reſidui conoidis hyperbolici dempto conoide parabolico, vt ſupra diximus, centrum grauitatis eſt punctum illud, in quo axis ſic diuiditur, vt pars propinquior vertici ſit tripla reliquæ.

[Figure 197]

Sit conoides hyperbolicum ABC, cuius axis BD, & ablatum conoides parabolicum EBF circa eundem axim BD, ita ſit ad reliquum ſolidum AEBFC, vt ſeſquialtera tranſuerſi lateris hyperboles, quæ conoides deſcribit ad axem BD: & ponatur BG ipſius GD tripla. Dico re-

liqui ſolidi AEBFC centrum grauitatis eſse G. Secta enim BD bifariam in puncto H, & poſita GK ipſius GH minori quantacumque longitudine propoſita, ſumptoque in GK quolibet puncto L, intelligantur id enim (fieri poſſe manifeſtum eſt ex ſupra demonſtratis) tres figuræ vna inſcripta conoidi EBF, & duæ circumſcriptæ altera alteri conoidum, vt ſupra factum eſt, compoſitæ ex cylindris æqualium altitudinum ita multiplicatis, vt vtrumque illud accidat; & vt ſecundi exceſſus centrum grauitatis quod ſit M (omnium autem trium dictorum exceſſuum in axe BD erunt centra grauitatis) ſit puncto G propinquius

[Figure 198]

quàm punctum L: & vt primus exceſſus ad ſecundum minorem habeat proportionem ea, quæ eſt LK, ad KH. Deinde vt HK ad KL, ita ſit HN ad NM, & vt primus exceſſus ad ſecundum, ita MO ad OH. Quoniam igitur cylindri omnes deficientes, & ſummus integer, ex quibus primus exceſſus conſtat, inter ſe ſunt æquales, habentque in axe BD centra grauitatis æqualibus interuallis à bipartiti axis BD ſectione H & inter ſe diſtantia; totius primi exceſſus centrum grauitatis erit H: ſecundi autem exceſſus centrum grauitatis ponitur M; cum igitur ſit vt primus exceſſus ad ſecundum, ita ex contraria parte MO

ad OH, erit tertij exceſſus ex duobus prioribus compoſiti centrum grauitatis O. Quoniam igitur minor proportio eſt primi exceſſus ad ſedundum, hoc eſt MO ad OH, quàm LK ad KH; erit conuertendo maior proportio HO ad OM, quàm HK ad KL: ſed vt HK ad KL, ita ponitur HN ad NM; maior igitur proportio eſt HO ad OM, quàm HN ad NM; eiuſdem igitur lineæ HM minor erit MO, quàm MN, & punctum O propinquius puncto G quam punctum N. Rurſus quia vt HK ad KL, ita eſt HN ad NM; erit componen do & per conuerſionem rationis, vt LH ad HK ita MH ad HN: & permutando, vt HM ad HL, ita HN ad HK: ſed HM eſt maior quàm HL; ergo & HN erit maior quam HK, & punctum N propinquius puncto G quàm punctum K: ſed punctum O propinquius erat puncto G quàm punctum N; multo igitur erit punctum O propinquius puncto G quàm punctum K. ponitur autem diſtantia GK minor quantacumque longitudine propoſita: & eſt O centrum grauitatis tertij exceſſus reliquo ſolido AEBFC circumſcripti; ex ijs igitur, quæ in primo libro demonſtrauimus, ſolidi AEBFC centrum grauitatis erit G. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO VII.

Omnis conoidis hyperbolici centrum grauitatis eſt punctum illud, in quo duodecima pars axis quarta ab ea, quæ baſim attingit ſic diuiditur, vt pars propinquior baſi ſit ad reliquam, vt ſeſquialtera tranſuerſi lateris hyperboles, quæ conoides deſcribit; ad axem conoidis.

Sit conoides hyperbolicum ABC, cuius axis BD:

tranſuerſum latus hyperboles, quæ conoides deſcribit ſit BE, huius autem ſeſquialtera BEF: & ſumpta axis BD tertia parte DG, & quarta DH, qua ratione erit GH axis BD pars duodecima, ordine quarta ab ea, cuius termi nus D; eſto vt FB ad BD, ita HK ad KG. Dico conoi- dis ABC centrum grauitatis eſſe K. Diuidatur enim co-

[Figure 199]

noides ABC in parabolicum conoides LBM, & reliquum ſolidum ALBMC, ita vt conoides LBM ad ſelidum ALBMC ſit vt FB ad BD, hoc eſt vt HK GK. Quo- niam igitur G eſt centrum grauitatis conoidis LBM, & H ſolidi ALBMC; tot us conoidis ABC centrum graui tatis crit K. Quod demonſtrandum crat.

TERTII LIBRI FINIS.